3. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031231:

Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen!

Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Aufgabe 031232:

Beweisen Sie folgenden Satz:

Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 031233:

Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von der reellen Zahl p – alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2) \qquad xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2)\,!$$

Aufgabe 031234:

Für welche reellen Zahlen x ist

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x + \frac{1}{2}}, \qquad \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x + \frac{1}{2}}, \qquad \text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x + \frac{1}{2}}\ ?$$

Aufgabe 031235:

Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $\overline{XY} = \overline{AB}$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche $ABCD$ sind.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

Aufgabe 031236:

Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B. Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.

b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.

c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.

d) Es ist $r_1 = 2r_2$.

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031231:

Wenn es eine Zahl x der geforderten Art gibt, so lässt sie sich in der Form

$$x = 10a + b \tag{1}$$

mit $a = 1, 2, \dots, 9$ und $b = 0, 1, 2, \dots, 9$ schreiben, da x eine zweistellige Zahl ist.

$b = 0$ kommt nicht in Frage, da dann die letzen drei Ziffern von x^3 Null wären, was nur für $x = 0$ möglich ist. Laut Aufgabenstellung sind alle Zahlen x gesucht, für die gilt:

$$x^3 = 100n + 10a + b\,, \tag{2}$$

wobei n eine natürliche Zahl ist.

Wegen (1) gilt: $x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$ (3)

Aus (2) und (3) folgt, dass $b^3 - b$ durch 10 teilbar ist, sich also in der Form $b^3 - b = 10m\,,$ (4)

m natürliche Zahl, darstellen lässt. Weiterhin folgt aus (2) und (3), dass $30ab^2 + b^3 - b - 10a$ durch 100 teilbar ist, sich also in der Form $30ab^2 + b^3 - b - 10a = 100k$ oder $3ab^2 + \frac{1}{10}(b^3 - b) - a = 10k\,,$ (5)

k natürliche Zahl, darstellen lässt.

Wegen (4) kommen für b von den Ziffern 1, ..., 9 nur die Ziffern 1, 4, 5, 6 und 9 in Frage. Setzt man diese der Reihe nach in (5) ein, so erhält man:

Für $b = 1$ ergibt sich $a = 5$, d. h. $x = 51$.

Für $b = 4$ ergibt sich $a = 2$, d. h. $x = 24$.

Für $b = 5$ ergibt sich $a = 2$ oder $a = 7$, d. h. $x = 25$ oder $x = 75$.

Für $b = 6$ folgt $a = 7$, d. h. $x = 76$.

Für $b = 9$ folgt $a = 4$ oder $a = 9$, d. h. $x = 49$ oder $x = 99$.

Für die Lösung der Aufgabe kommen also nur die Zahlen 24, 25, 49, 51, 75, 76, 99 in Frage. Durch Bildung der dritten Potenzen dieser Zahlen bestätigt man, dass jede von ihnen allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (11)

Lösung 031232:

Beweis: Die Lösungsidee bei derartigen Aufgaben besteht darin, die gegebene Gleichung in ein Produkt von Faktoren umzuformen, das null ist. Die gestellte Bedingung (hier die Rechtwinkligkeit des Dreiecks) muss sich dann darin wiederfinden, dass die Faktoren einzeln null werden. Mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS ist klar, dass die Gleichung

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0 \tag{1}$$

genau das Gewünschte liefert. Es bleibt also nur zu zeigen, dass (1) äquivalent zur gegebenen Gleichung

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

ist. Dieser Lösungsansatz gestattet es gleichzeitig, beide Beweisrichtungen elegant zu erledigen: i) Ist das Dreieck rechtwinklig, verschwindet genau einer der Faktoren in (1) und (2) ist erfüllt; ii) Ist (2) und damit (1) erfüllt, so muss mindestens einer der Faktoren in (1) verschwinden, und das bedeutet Rechtwinkligkeit des Dreiecks. Wie kommt man nun von (2) auf (1)? Wir benutzen ein Additionstheorem und den Kosinussatz:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)^2 - 2\,a^2b^2c^2}{2\,a^2b^2c^2}.$$

Zusammen mit den zyklischen Vertauschungen dieser Gleichung für $\cos 2\beta$ und $\cos 2\gamma$ führt das auf die Gleichung

$$a^2(b^2+c^2-a^2)^2 + b^2(c^2+a^2-b^2)^2 + c^2(a^2+b^2-c^2)^2 - 4\,a^2b^2c^2 = 0.$$

Ein Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke, Zusammenfassen und anschließende Faktorisierung führt in der Tat auf (1). □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 031233:

$$\begin{aligned}
xy - \frac{x}{y} &= p(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2 = (xy-\frac{x}{y})/p \\
xy + \frac{x}{y} &= 3p(x^2+y^2) = 3p(xy-\frac{x}{y})/p = 3xy - 3\frac{x}{y} \\
4\frac{x}{y} &= 2xy \\
2x &= xy^2
\end{aligned}$$

1. Fall: $x = 0$

Einsetzen in die 2. Gleichung: $0 = py^2 \rightarrow$ y müsste 0 sein. Dies ist aber nicht möglich, da durch y geteilt wird. Also gibt es nur eine Lösung für den Spezialfall, dass $p = 0$ ist. In diesem Fall kann y beliebig ($\neq 0$) sein.

2. Fall: $x \neq 0$

$2 = y^2$
$y = \pm\sqrt{2}$

Fall 2.1: $y = \sqrt{2}$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x &= p(x^2+2) \\
0 &= px^2 + 2p - \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x \\
0 &= x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2 \\
x_{1,2} &= \frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}
\end{aligned}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $1/8p^2 - 2 \geq 0$, also $-1/4 \leq p \leq 1/4$.
Um festzustellen, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde, wird noch in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \cdot \sqrt{2} + (\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= 3p((\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2})^2 + 2) \\
(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} &= 6p + 3p(\frac{1}{8p^2} + \frac{1}{8p^2} - 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}p} \cdot \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \\
\frac{3}{4p} \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2} &= \frac{3}{4p} \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}
\end{aligned}$$

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-1/4 \leq p \leq 1/4$ in diesem Fall die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$, $y_1 = \sqrt{2}$ sowie $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$, $y_2 = \sqrt{2}$.

Fall 2.2: $y = -\sqrt{2}$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$\begin{aligned}
-\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x &= p(x^2+2) \\
0 &= px^2 + 2p + \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x \\
0 &= x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2 \\
x_{3,4} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}
\end{aligned}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $1/8p^2 - 2 \geq 0$, also $-1/4 \leq p \leq 1/4$.
Um festzustellen, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde, wird noch in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
(-\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \cdot (-\sqrt{2}) + (-\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} &= 3p((-\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2})^2 + 2) \\
(-\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \cdot \frac{-3}{\sqrt{2}} &= 6p + 3p(\frac{1}{8p^2} + \frac{1}{8p^2} - 2 \mp \frac{1}{\sqrt{2}p} \cdot \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}) \\
\frac{3}{4p} \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2} &= \frac{3}{4p} \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}
\end{aligned}$$

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-1/4 \leq p \leq 1/4$ in diesem Fall die Lösungen $x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$, $y_3 = -\sqrt{2}$ sowie $x_4 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$, $y_4 = -\sqrt{2}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 031234:

Zuerst wählen wir die Bezeichnungen $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ und $g(x) = \frac{2}{x+1/2}$. Dann betrachten wir den Fall b), da sich Gleichungen leichter handhaben lassen und Schlüsse auf die Ungleichungen zulassen. Folgende Umformungen führen zur Lösung:

$$f(x) = \frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

und $g(x) = \frac{4}{2x+1}$. Die Gleichung lautet nunmehr:

$$(2x+1)^2 = 4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Das führt auf die falsche Aussage $0 = 1$. Nun waren aber alle Umformungen äquivalent, also kann die gestellte Gleichung keine Lösungen besitzen. Das bedeutet aber auch, dass sich die Funktionen f und g nicht schneiden. Daraus könnte man den voreiligen Schluss ziehen, dass entweder überall a) oder überall c) gilt. Wir bemerken aber, dass f und g Polstellen haben, und zwar bei $x = -1, x = 0$ bzw. $x = -\frac{1}{2}$. Es müssen also die vier Intervalle $(-\infty,-1), (-1,-1/2), (-1/2,0)$ und $(0,\infty)$ getrennt untersucht werden. Es würde genügen, f und g nur an einer Stelle aus jedem Intervall zu betrachten. Trotzdem wird hier die Lösung einer Ungleichung ausführlich vorgeführt. Mit obigen Umformungen erhält man (aus a):

$$\frac{2x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} > \frac{4}{2x+1} \qquad | \cdot (2x+1)$$

Bei der angedeuteten Multiplikation muss man die Fälle $x > 1/2$ und $x < 1/2$ unterscheiden, bei letzterem würde das Relationszeichen umgekehrt. Im ersteren folgt:

$$\frac{(2x+1)^2}{(2x+1)^2-1} > 1 \qquad | \cdot [(2x+1)^2 - 1]$$

Die eckigen Klammern sind für $x < 0$ negativ, im Intervall $(-1/2, 0)$ ergibt sich $0 < -1$, also eine falsche Aussage. Dort gilt daher nicht a), sondern c). Für die anderen Intervalle geht man analog vor. Dabei erhält man: c) gilt außerdem für $x < -1$, a) gilt für $x \in (-1,-1/2)$ und $x > 0$.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 031235:

Der Mittelpunkt von XY werde mit M bezeichnet, der Lotfußpunkt von M auf AA' mit F. Da A, X, Y, M und F in einer Ebene liegen – die Ebene, in der auch ΔAXY liegt – gilt nun nach Strahlensatz

$$\frac{FM}{AY} = \frac{XM}{XY} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{AF}{AX} = \frac{YM}{YX} = \frac{1}{2}.$$

Nach Satz des Pythagoras gilt

$$AM^2 = AF^2 + FM^2 = \frac{1}{4}AX^2 + \frac{1}{4}AY^2,$$

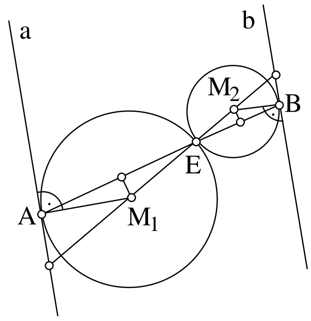
da $AF \perp FM$. Ferner ist ΔAXY rechtwinklig mit Kathete XY und es gilt $AX^2 + AY^2 = XY^2 = AB^2$. Also ist $AM = \frac{1}{2}AB \equiv$ konstant.

Da XY vollständig zum Würfel gehört, ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Strecken XY der Teil der Kugel um A mit Radius $\frac{1}{2}AB$, der zu $ABCDA'B'C'D'$ gehört.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 031236:

Konstruktion:



In A und B werden die Senkrechten zu a bzw. b errichtet, diese seien $a^\perp$ und $b^\perp$.

Die Strecke AB wird im Verhältnis $r_1 : r_2$ geteilt; der Teilpunkt sei E.

Zu AE wird die Mittelsenkrechte konstruiert, ihr Schnittpunkt mit $a^\perp$ ist der gesuchte Mittelpunkt M_1.

Analog erhält man M_2 als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BE mit $b^\perp$. Die Radien sind $r_1 = M_1E$ und $r_2 = M_2E$.

Beweis:

Zu zeigen ist zuerst (Bild a), dass der Punkt E der einzig mögliche Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise ist. Im weiteren wird geprüft, dass die Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt.

Die erste Überlegung ist, dass die Punkte M_1 und M_2 auf den Senkrechten zu a bzw. b in den Punkten A bzw. B liegen müssen. Genauer gesagt liegen sie auf dem Teilstrahl, der die jeweils andere Gerade schneidet. Nur so können die Bedingungen a) und b) erfüllt werden. Um Bedingung c) zu genügen, zeigt man: Wählt man zwei Punkte M_1' auf $a^\perp$ und M_2' auf $b^\perp$ (mit $AM_1' : BM_2' = r_1 : r_2$), so ist der Punkt E, der $M_1'M_2'$ im Verhältnis $r_1 : r_2$ teilt, unabhängig von der Wahl der M_i' und liegt auf AB. Das ist der Fall, weil die Dreiecke EBM_2' und EAM_1' ähnlich sind (Wechselwinkel bei M_1' und M_2', sowie $M_1'E : M_1'A = M_2'E : M_2'B$ lt. Voraussetzung). Da der Punkt E der eindeutige Teilpunkt für alle denkbaren Mittelpunktspaare M_1', M_2' ist, muss er auch der Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise sein.

Hiermit ist nun klar, dass die obige Konstruktion korrekt ist: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten haben zu A und E, die auf dem Kreis liegen müssen, den gleichen Abstand. Daher muss M_1 auf ihr liegen. Gleichzeitig muss M_1 auf $a^\perp$ liegen, also ist M_1 der Schnittpunkt. Ebenso geht man für M_2 vor. □

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag