4. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040731:

Wieviel Seiten eines Buches werden von Seite 1 an fortlaufend numeriert, wenn dabei insgesamt 1260 Ziffern gedruckt werden?

Aufgabe 040732:

Zeichne ein nicht gleichseitiges Parallelogramm, und beweise, daß die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechteckes sind!

Aufgabe 040733:

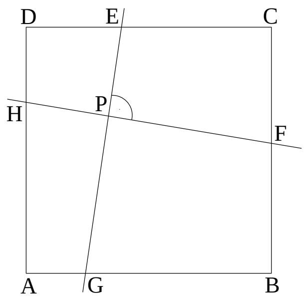
Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meterlauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:

1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.

In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch.

Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

Aufgabe 040734:



Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, daß jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (vgl. Abb.).

Beweise, daß die beiden Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ gleich lang sind!

Aufgabe 040735:

Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{ccccc} & D & R & E & I \\ + & E & I & N & S \\ \hline & V & I & E & R \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es stellt sich aber heraus, daß es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

Aufgabe 040736:

Gegeben ist das Dreieck ABC. Es soll ein Rhombus so konstruiert werden, daß einer seiner Eckpunkte mit A zusammenfällt und die drei übrigen Eckpunkte jeweils auf einer Dreiecksseite liegen.

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040731:

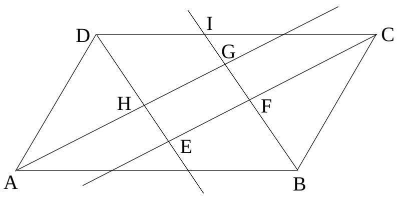
Zunächst hat man die Seiten 1-9 welche je 1 Ziffern haben ⇒ 9 Ziffern

Dann die Zahlen von 10-99 mit je 2 Ziffern ⇒ 180 Ziffern

Die nun folgenden Zahlen sind alle dreistellig
Bis zur Seite 99 wurden 189 Ziffern benötigt, zieht man das von den 1260 Gesamtziffern ab so sind noch 1071 Ziffern übrig. Teilt man das durch drei so erhält man die Anzahl der dreistelligen Zahlen. Diese ist 357. Das heißt, dass nach Seite 99 noch 357 andere Seiten kommen. Rechnet man nun 99+357 so erhält man die Gesamtseitenzahl. Das sind 456. Also hat das Buch 456 Seiten.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040732:



Entsprechend der Aufgabenstellung braucht der Schüler den Beweis nur für das von ihm gezeichnete Parallelogramm zu führen, also keine Diskussion der verschiedenen möglichen Lagebeziehungen vorzunehmen. Wir betrachten als Beispiel den abgebildeten Fall und wählen von den verschiedenen Beweismöglichkeiten, bei denen auch Drehungen und Parallelverschiebungen verwendet werden können, die folgende:

Es gilt $\sphericalangle EDC \simeq \sphericalangle ABG \simeq \sphericalangle BIC$ und damit $EH \parallel FG$. Entsprechend beweist man $HG \parallel EF$. Also ist $EFGH$ ein Parallelogramm.

Bezeichnet R einen rechten Winkel, so gilt

$$\sphericalangle AGB = 2R - \frac{1}{2}\sphericalangle DAB - \frac{1}{2}(2R - \sphericalangle DAB) \simeq R.$$

Das Parallelogramm $EFGH$ ist daher ein Rechteck.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 040733:

Man betrachte zunächst die Aussagen 1 und 2. Es gibt nun 3 Möglichkeiten. Entweder ist Paul erster oder Paul ist zweiter oder Paul ist weder zweiter noch erster.

Möglichkeit 1: Paul ist weder erster noch zweiter:

Dann würde folgen daß Jürgen zweiter und Wolfgang dritter ist. Jetzt kann aber keine der Aussagen bei 3. wahr sein, weil Hans nicht zweiter sein kann, weil das schon Jürgen ist und Wolfgang nicht vierter sein kann, weil er schon dritter ist $\Rightarrow$ nicht möglich.

Möglichkeit 2: Paul ist zweiter:

Wäre Paul zweiter, so wäre die Aussage "Paul ist erster" falsch, dann müßte aber die Aussage "Jürgen ist zweiter" gelten. Das geht aber nicht, weil Paul schon zweiter ist $\Rightarrow$ nicht möglich

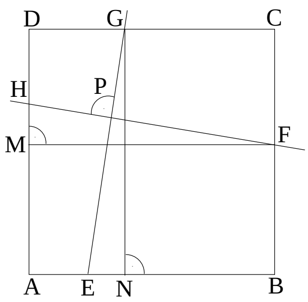
Möglichkeit 3: Paul ist erster:

Also ist die Aussage "Paul ist zweiter" falsch. Daraus folgt, daß Wolfgang dritter ist. (Aussage 2) Also ist die Aussage "Wolfgang ist vierter" falsch, also ist Hans zweiter. (Aussage 3) Jürgen bleibt übrig und ist demnach vierter. $\Rightarrow$ Lösung

Paul belegte den ersten Platz, Hans den zweiten, Wolfgang den dritten und Jürgen den vierten. Aufgrund des aufgezeigten Lösungsweges kann es auch keine andere Lösung geben.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040734:



Wir legen durch F die Parallele zu AB und durch G die Parallele zu BC. Es entstehen die Punkte M und N (vgl. Abb.). Dann gilt $NG \simeq MF$;

$\sphericalangle MFH = \sphericalangle NGE$ wegen $MF \perp NG$, $HF \perp EG$. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke ΔENG und ΔHMF.

Also gilt: $EG \simeq HF$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 040735:

Betrachte man zunächst die zweite Spalte von rechts: $E + N = E$. So gibt es nur 2 Möglichkeiten für N:

(1) $N = 0$, $E + 0 = E$ wahr, kein Übertrag

Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts.

$R + I = I \Rightarrow R = 0$ nicht möglich, da $R = N = 0$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen

(2) Von der Aufgabe $I + S = R$ bleibt ein Übertrag zurück, dieser kann maximal 1 sein da I und S maximal 8 und 9 (I und S müssen ja einstellig sein) sein können und demnach maximal 17 für $I + S$ infrage kommt.

$N = 9$, $E + 9 + 1 = E + 10$ es bleibt wieder eins als Übertrag, wahr

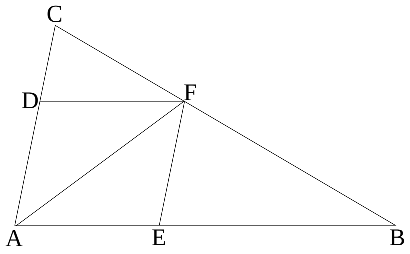
Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts.

$R + I + 1 = I + 10$ (hier muss ein Übertrag entstehen denn würde $R + I + 1 = I$ so wäre $R = -1$, die Buchstaben können aber nur positive Zahlen annehmen damit eine Additionsaufgabe entsteht.)
$R = 9$ nicht möglich, da $R = N = 9$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

Also gibt es keine Lösung für die Aufgabe.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040736:



Wir denken uns die Aufgabe gelöst und betrachten den Rhombus $AEFD$. Die Diagonale AF halbiert den Winkel $\sphericalangle DAE$ und damit auch den Winkel $\sphericalangle CAB$.

Weiterhin gilt $AE \simeq EF \simeq FD \simeq DA$ sowie $AE \parallel DF$ und $AD \parallel EF$.

Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen die Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle CAB$, ihren Schnittpunkt mit BC nennen wir F. Durch F konstruieren wir Parallelen zu den Dreiecksseiten AB bzw. AC. Die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten AB und AC werden E bzw. D genannt. Das Viereck $AEFD$ ist somit ein Parallelogramm und wegen $\sphericalangle DAF \simeq \sphericalangle FAE$ ein Rhombus.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.