04. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 09
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

04. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 09
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040931:

Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so daß es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.

In wieviel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität $66\frac{2}{3}\%$ von der des Werkes A beträgt.

Aufgabe 040932:

Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.

Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie x möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 9} + \frac{6}{9 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 13} + ... + \frac{6}{31 \cdot 33}$$

Aufgabe 040933:

Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius r das einbeschriebene Quadrat!

Aufgabe 040934:

Ist die folgende Aussage richtig?

Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Aufgabe 040935:

Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus:	"Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar."
Inge:	"Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat."
Günter:	"Die Zahl ist kleiner als 3."
Monika:	"Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat."
Bärbel:	"Die Zahl ist irrational."
Peter:	"Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat."

Ferner erfährt er, daß von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.

Wie heißt die Zahl?

Aufgabe 040936:

Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von 45° bilden.

a) Wieviel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?

b) Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante a an!

04. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 09
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040931:
Die auf den Auftrag bezogenen Tagesleistungen der beiden Betriebe seinen a und b, die herzustellende Gesamtmenge sei p.
Dann gilt $12(a+b)=p$.
Die restlichen fünf Sechstel soll das Werk B in x Tagen schaffen.
Da $a=1{,}5b$ ist,gilt
$12\cdot 1{,}5b+12b=p$.
Daraus folgt $30b=p$.
Das heißt: Werk B hätte allein den Auftrag in 30 Tagen ausführen können. Die restlichen fünf Sechstel schafft es also in 25 Tagen. Die benötigten Teile stehen 27 Tage nach dem Beginn der Arbeiten in beiden Werken zur Verfügung.

Aufgeschrieben und gelöst von Günter Gebhard

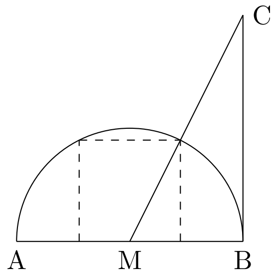
Lösung 040932:
Man klammert zunächst 3 aus. Jeder der Summanden von der Form $\frac{2}{a(a+2)}$ lässt sich als Differenz zweier Brüche schreiben: $\frac{2}{a(a+2)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}$.

Daher lautet die zu berechnende Summe

$$\begin{aligned} x &= 3\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{9}\cdots-\tfrac{1}{31}+\tfrac{1}{31}-\tfrac{1}{33}\right)\\ &= 3\cdot\tfrac{28}{165}\\ &= \tfrac{28}{55}. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Günter Gebhard

Lösung 040933:



Seien A, B die Ecken des Halbkreises und M der Mittelpunkt, Konstruiere in B eine Strecke der Länge $|AB|=2r$ senkrecht zur Gerade AB mit Endpunkt C.

Der Schnittpunkt der Gerade MC und des Halbkreises ist eine Ecke des gesuchten Quadrats. Mittels Spiegelung und Lot erhalten wir die anderen 3 Ecken.

Wenn C' der so konstruierte Schnittpunkt der Gerade MC mit dem Halbkreis ist und B' der Fußpunkts des Lots durch C' auf der Strecke AB ist, dann ist MB' genau halb so groß wie $B'C'$ nach Strahlensatz und es entsteht das gesuchte Quadrat.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 040934:
Die Zahlen seien $x, x+1, x+2$ und $x+3$, dann ist das Produkt vermehrt um 1 gleich:

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + 1 =$$

$$= x^4 + 3x^3 + 2x^3 + 6x^2 + x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x + 1$$

$$= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

$$= (x \cdot (x+3) + 1)^2$$

D.h. das Produkt vierer beliebiger aufeinander folgender Zahlen vermehrt um eins ist gleich dem Quadrat aus dem Produkt der ersten und letzten Zahl vermehrt um eins, also ist die Aussage wahr.

Aufgeschrieben und gelöst von Philipp Weiß

Lösung 040935:
Zunächst lässt sich aus den Aussagen von Inge, Monika und Peter jeweils konkret eine Zahl mit den üblichen Formeln für Flächeninhalte etc. bestimmen:

Inge:	$\frac{1}{\pi}$
Monika:	$2\sqrt{2}$
Peter:	$\sqrt{3}$

Jetzt kommt es darauf an, wie die Aussage von Klaus, "Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar." gemeint ist. Natürlich ist jede reelle Zahl ohne Rest durch 4 teilbar, wenn der Komplementärteiler eine reelle Zahl sein darf. In dem Fall wäre aber die Aufgabe nicht eindeutig lösbar (sowohl $2\sqrt{2}$ als auch $\sqrt{3}$ wären dann mögliche Lösungen).

Es wird also gemeint sein "Die Zahl ist ein ganzzahliges Vielfaches von 4".

Das trifft auf keine der obigen Zahlen zu und kann auch nicht sein, wenn die Zahl irrational ist. Damit ist diese Aussage falsch, die Aussage von Inge muss also stimmen, und die Aussagen von Günter und Bärbel treffen hier ebenfalls zu, die gesuchte Zahl ist also $\frac{1}{\pi}$.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 040936:

a) Da es sich jeweils um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a handelt, ist jede Mantelfläche jeder der Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge a, und die Dreiecke sind alle untereinander kongruent.

   Wir berechnen die Größe des Winkels zwischen zwei Dreiecksflächen, die dieselbe Würfelkante als Basis haben. Der Winkel setzt sich zusammen aus

   1. dem Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide.
   2. dem rechten Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen des Würfel und
   3. dem Winkel zwischen der anderen Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide. Seine Größe ist mithin $45° + 90° + 45° = 180°$.

   Die beiden benachbarten Dreiecke liegen in also derselben Ebene, und weil sie einander kongruent und gleichschenklig sind und eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ihre Schenkel die Seiten eine Rhombus.

   Da der Würfel 12 Kanten hat, besitzt der zusammengesetzte Körper 12 Rhombusflächen als Seitenflächen; denn keine zwei zu verschiedenen Kanten gehörende Rhomben liegen in einer Ebene. Die

Rhomben sind untereinander kongruent.

Wir zeigen noch, dass die Rhomben keine Quadrate sind. Die Höhen der aufgesetzten Pyramiden haben - wegen des Winkels zwischen Mantel- und Grundfläche jeder Pyramide von der Größe 45° - die Länge $\frac{a}{2}$.

Die Höhen der die Mantelflächen bildenden Dreiecksflächen haben nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2(\frac{a}{2})^2}$, d.h. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Damit haben die Diagonalen der Rhomben unterschiedliche Länge, nämlich a und $a\sqrt{2}$.

b) Jede der aufgesetzten Pyramiden hat das Volumen $\frac{1}{3}(a^2\frac{a}{2})$, d.h. $\frac{a^3}{6}$.

Die sechs aufgesetzten Pyramiden haben somit zusammen mit dem Würfel das Volumen $2a^3$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (34)

Quellenverzeichnis

(34) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band II. Verlag Volk und Wissen, 1975