4. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041021:

Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.

Ferner wissen wir folgendes:

a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.

b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.

c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Welchen Vor- und Zunamen hat jede der vier Personen?

Aufgabe 041022:

Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten (ohne Benutzung von Logarithmentafel oder Rechenstab):

$$y = 10 - 2 \cdot \lg 32 - 5 \cdot \lg 25!$$

Aufgabe 041023:

Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.

Man beweise, daß das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke flächengleich sind.

Aufgabe 041024:

Der Weg von einem Ort A nach einem Ort B ist $11,5$ km lang und führt zuerst bergauf, dann verläuft er auf gleicher Höhe und schließlich bergab. Ein Fußgänger, der von A nach B ging, legte diesen Weg in 2 h 54 min zurück. Für den Rückweg auf gleichem Kurs brauchte er 3 h 6 min. Dabei ging er jeweils bergauf mit einer Geschwindigkeit von $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, auf dem Mittelteil mit einer Geschwindigkeit von $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und bergab mit $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie lang sind die einzelnen Teilabschnitte, wenn man voraussetzt, daß auf jedem Teilabschnitt die jeweilige Geschwindigkeit konstant war?

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041021:
Es sei folgende Schreibweise genutzt:

A = Arnold; B = Bernhard; C = Conrad; D = Dietrich

XY bedeutet: Vorname = X und Nachname = Y

Wegen a) entfallen die Varianten AA, BB, CC, DD. Damit ergeben sich folgende Möglichkeiten

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC

Wegen Bedingung b) entfällt Variante CA

Wegen Bedingung c) muss gelten mit X und Y noch zu ermittelnden Namen:

$BX \Rightarrow XY \Rightarrow YD$, also:

$X = A$: $BA \Rightarrow AY \Rightarrow YD$

$Y = A$ entfällt, weil sonst die zweite Person den Namen AA hätte, was a) widerspricht

$Y = B$ entfällt, da sonst die erste und dritte Person mit Vornamen B lautet und sowohl den Nachnamen A als auch D hätte

$Y = C$ führt zu den Namen BA, AC, CD und DB

$Y = D$ entfällt, da sonst die dritte Person DD wäre, was a) widerspricht

$X = B$: BB entfällt wegen a)

$X = C$: $BC \Rightarrow CY \Rightarrow YD$

$Y = A$ führt zu den Namen BC, CA, AD und DB. Dies entfällt, da laut b) CA nicht erlaubt ist.

$Y = B$ entfällt, da sonst die erste und dritte Person mit Vornamen B lautet und sowohl den Nachnamen C als auch D hätte

$Y = C$ entfällt, weil sonst die zweite Person den Namen CC hätte, was a) widerspricht

$Y = D$ entfällt, da sonst die dritte Person DD wäre, was a) widerspricht

$X = D$: $BD \Rightarrow DY \Rightarrow YD$ entfällt, da sonst

$Y = A$ entfällt, da sonst die erste und dritte Person den Nachnamen D und sowohl den Vornamen B als auch A hätten

$Y = B$ führt zu den Namen BD, DB, AC, CA. Dies entfällt, da laut b) CA nicht erlaubt ist.

> $Y = C$ entfällt, da sonst die erste und dritte Person den Nachnamen D und sowohl den Vornamen B als auch C hätten
>
> $Y = D$ entfällt, da sonst die erste und dritte Person den Nachnamen D und sowohl den Vornamen B als auch D hätten

Somit gibt es eine eindeutige Lösung: BA, AC, CD und DB, also: Bernhard Arnold; Arnold Conrad; Conrad Dietrich; Dietrich Bernhard.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Matthias Lösche

Lösung 041022:
Folgende Gesetze werden angewandt:

(1) $\lg(a^b) = b \cdot \lg a$

(2) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$

(3) $\lg x = \log_{10} x$

(4) $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ und insbesondere $\log_a a = 1$, weil $a^1 = a$ und folglich $\lg 10 = 1$

Damit kann nun äquivalent umgeformt werden:

$$\begin{aligned} y &= 10 - 2 \cdot \lg 2^5 - 5 \cdot \lg 5^2 \\ &= 10 - 2 \cdot 5 \cdot \lg 2 - 5 \cdot 2 \lg 5 \\ &= 10 - 10 \cdot \lg 2 - 10 \cdot \lg 5 \\ &= 10 \cdot (1 - \lg 2 - \lg 5) \\ &= 10 \cdot (1 - (\lg 2 + \lg 5)) \\ &= 10 \cdot (1 - (\lg(2 \cdot 5))) \\ &= 10 \cdot (1 - \lg 10) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Günter Gebhard

Lösung 041023:
Eine "genau dann wenn"-Aussage bedeutet, dass der Beweis in beiden Richtungen geführt werden muss. Es folgen daher zwei Beweise:

Beweis 1

Es soll die Aussage bewiesen werden: *In einem Parallelogramm sind die vier durch seine Diagonalen erzeugten Dreiecke flächengleich.*

Voraussetzung:

> A, B, C, D sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.
>
> E sei der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD.

Behauptung:

> $F_{\Delta ABE} = F_{\Delta BCE} = F_{\Delta CDE} = F_{\Delta ADE}$

Beweis:

Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, sind gegenüberliegende Seiten gleich groß und halbieren einander die Diagonalen:

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \qquad \overline{BC} = \overline{AD} \tag{1}$$
$$\overline{AE} = \overline{CE}, \qquad \overline{BE} = \overline{DE} \tag{2}$$

Nach Kongruenzsatz (sss) sind paarweise die Dreiecke ABE und CDE sowie BCE und ADE kongruent mit obigen Gleichungen (1) und (2). Folglich gilt

$$F_{\Delta ABE} = F_{\Delta CDE} \tag{3}$$
$$F_{\Delta BCE} = F_{\Delta ADE} \tag{4}$$

Die benachbarten Dreiecke ABE und BCE haben ebenfalls einen gleich großen Flächeninhalt: mit der Grundseite auf AC: $\overline{AE} = \overline{CE}$ gemäß (2) und der gleichen Höhe von B auf diese Grundseite. Damit sind für die Dreiecksflächenformel $F = g \cdot \frac{h}{2}$ die gleichen Werte einzusetzen und folglich der Flächeninhalt gleich groß. Es gilt also:

$$F_{\Delta ABE} = F_{\Delta BCE} \tag{5}$$

Durch Zusammenfassen der Gleichungen (3), (4) und (5) folgt die Behauptung. □

Beweis 2

Es soll die Aussage bewiesen werden: *Wenn in einem konvexen Viereck die vier durch seine Diagonalen erzeugten Dreiecke flächengleich sind, ist das Viereck ein Parallelogramm.*

Voraussetzung:

A, B, C, D sind die Eckpunkte eines konvexen Vierecks.

$F_{\Delta ABE} = F_{\Delta BCE} = F_{\Delta CDE} = F_{\Delta ADE}$

Seien $a := \overline{AE}$, $b := \overline{BE}$, $c := \overline{CE}$, $d := \overline{DE}$.

Behauptung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis:

Es gilt laut Voraussetzung bzgl. der Dreiecke ΔABE und ΔCDE:

$$F_{\Delta ABE} = F_{\Delta CDE}$$
$$\frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \cdot cd \cdot \sin \sphericalangle CED$$

Da Scheitelwinkel gleich sind gilt:

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle CED$$

und folglich

$$a \cdot b = c \cdot d \tag{6}$$

Analog folgt zu den Dreiecken ΔADE und ΔBCE:

$$a \cdot d = b \cdot c \tag{7}$$

Wenn man (6) und (7) passend multipliziert, erhält man: $ab \cdot ad = cd \cdot bc$, daraus folgt $a = c$ und aus $ab \cdot bc = cd \cdot ad$ folgt $b = d$.

Nun ist nachgewiesen, dass sich die Diagonalen einander halbieren. Dies ist ein hinreichendes Kriterium für ein Parallelogramm. □

Aufgeschrieben und gelöst von Sergej Ryl

Lösung 041024:

Mit x, y, z sind die Längen der Teilstrecken von A in Kilometer bezeichnet. Die Zeitangaben gelten: 2 h 54 min $= 2,9$ h sowie 3 h 6 min $= 3,1$ h

Mit der physikalischen Gesetzmäßigkeit $v = \frac{s}{t}$ gilt umgeformt $t = \frac{s}{v}$ und daher für beide Wege:

Für den Weg von A nach B:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x}{3\frac{km}{h}} + \frac{y}{4\frac{km}{h}} + \frac{z}{5\frac{km}{h}} = 2,9\,\mathrm{h} \tag{1}$$

Für den Weg von B nach A:

$$t_4 + t_5 + t_6 = \frac{x}{5\frac{km}{h}} + \frac{y}{4\frac{km}{h}} + \frac{z}{3\frac{km}{h}} = 3,1\,\mathrm{h} \tag{2}$$

Für den Gesamtweg:

$$x + y + z = 11,5\,\mathrm{km} \tag{3}$$

Nun gilt für die Differenz der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= 2,9\,\mathrm{km} \\
\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} &= 3,1\,\mathrm{km} \\
\frac{2}{15}\,x - \frac{2}{15}\,z &= -0,2\,\mathrm{km} \\
\frac{2}{15}(x - z) &= -0,2\,\mathrm{km} \\
x &= z - 1,5\,\mathrm{km} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Ferner gilt für die Differenz der Gleichung (3) und der vierfachen Gleichung (2):

$$\begin{aligned}
x + y + z - 4 \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3}\right) &= 11,5\,\mathrm{km} - 4 \cdot 3,1\,\mathrm{km} \\
\frac{x}{5} - \frac{z}{3} &= -0,9\,\mathrm{km} \\
3x - 5z &= -13,5\,\mathrm{km} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Setzt man (4) in (5) ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
3 \cdot (z - 1,5\,\mathrm{km}) - 5z &= -13,5\,\mathrm{km} \\
-2\,z - 4,5\,\mathrm{km} &= -13,5\,\mathrm{km} \\
z &= 4,5\,\mathrm{km} \qquad (6)
\end{aligned}$$

(6) in (4) eingesetzt, ergibt $x = 3\,\mathrm{km}$ sowie mit (3): $y = 4\,\mathrm{km}$.

Folglich führt der Weg von A nach B zunächst 3 km bergauf, dann 4 km auf gleicher Höhe und schließlich 4,5 km bergab.

Probe: (ohne Einheiten) $\frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{4,5}{5} = 2,9$; $\frac{3}{5} + \frac{4}{4} + \frac{4,5}{3} = 3,1$; $3 + 4 + 4,5 = 11,5$.

Aufgeschrieben und gelöst von Sergej Ryl