4. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041221:
Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, daß aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.

Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen. Unterscheiden Sie die folgenden Fälle!

a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.

b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.

c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

Aufgabe 041222:
Es ist zu beweisen, daß alle Zahlen der Form

$$73^n + 1\,049 \cdot 58^n$$

- wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist - durch 1965 teilbar sind.

Aufgabe 041223:
Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung $a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$ richtig ist.

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 041224:
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$
$$x + y = 90°!$$

(Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.)

Aufgabe 041225:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleich großen Winkeln erscheinen (d.h. $\sphericalangle BPA \cong \sphericalangle CPB \cong \sphericalangle CPA$).

Aufgabe 041226:
Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen $x^2 + y^2 < r^2$ und $\mid y - x \mid > \frac{r}{2}$ genügen ($r > 0$)!

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041221:

Lässt man zu, dass durch die Schnitte kein Punkt der Kanten des Würfels im Restkörper enthalten sein muss, dann sind keine eindeutigen Ergebnisse möglich, siehe unten. Daher wird angenommen, dass die Aufgabenstellung (als erste Aufgabe einer zweiten Runde) sich darauf bezieht, dass von jeder Kante noch jeweils mindestens ein Punkt im Restkörper enthalten ist.

a) Wir betrachten zuerst eine Seitenfläche $ABCD$ des Würfels. In dieses kann ein regelmäßiges Viereck (also Quadrat) $A_1B_1C_1D_1$ mit A_1 auf AB, B_1 auf BC, C_1 auf CD und D_1 auf DA nur genau so einbeschrieben werden, indem $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1|$ gilt.

(Dass dann $A_1B_1C_1D_1$ tatsächlich ein Quadrat ergibt, zeigt die Rotationssymmetrie der Figur, sodass alle Seitenlängen und alle Innenwinkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ gleich groß sind.)

Aufgrund der Symmetrie ist $|AD_1| = |A_1B|$.

Aufgrund der Kongruenz der aus den Seitenflächen durch die Schnitte entstehenden Quadrate muss der zu $ABCD$ benachbarte Würfelseitenfläche $ABFE$ auf die gleiche Weise ein Quadrat $A_1B_2F_2E_2$ mit B_2 auf BF, F_2 auf FE und E_2 auf EA einbeschrieben werden. Insbesondere gilt dann $|AE_2| = |A_1B|$.

Analog erhält man auch auf der zu beiden bisher betrachteten Würfelseitenflächen $ABCD$ und $ABFE$ benachbarten Würfelseitenfläche $AEHD$ ein einbeschriebenes Quadrat $E_2E_3H_3D_1$ mit E_3 auf EH und H_3 auf HD, für welches $|AE_2| = |DD_1| = |AD| - |AD_1| = |AB| - |BA_1| = |AA_1|$ gilt.

Damit ist $|A_1B| = |AE_2| = |AA_1|$, sodass A_1 der Mittelpunkt von AB ist und aus Symmetriegründen also jede Kante des Würfels durch die entsprechenden Schnitte halbiert wird.

Der Teilkörper, der beim Abtrennen einer Würfelecke entsteht, ist demnach eine dreiseitige Pyramide mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche, deren Katheten die Länge $\frac{a}{2}$ haben, und Höhe $\frac{a}{2}$. Jeder dieser Teilkörper hat damit ein Volumen von $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}a^3$, und da sich die acht entstehenden, abgetrennten Teilkörper jeweils paarweise nicht in inneren Punkten überschneiden, besitzt der verbleibende Restkörper ein Volumen von $a^3 - 8 \cdot \frac{1}{48}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

(Würde man die "Kantenlängen" der abzuschneidenden – sich dann überschneidenden – dreiseitigen Pyramiden auf knapp unter a erhöhen, so entstünde zwar aus jeder Würfelseitenfläche ein Quadrat mit beliebig kleiner Kantenlänge; der verbleibende Restkörper hätte aber ein Volumen, welches unter jede beliebige Schranke, die größer als $\frac{1}{3}a^3$ ist, gedrückt werden kann: Die abgeschnittenen dreiseitigen Pyramiden zu zwei gegenüberliegenden Ecken im Würfel überschneiden sich nich, haben aber jeweils ein Volumen von knapp unter $\frac{1}{3}a^3$, sodass der verbleibende Restkörper höchstens ein Volumen von "etwas mehr" als $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3$ besitzen kann. Der Betrag von "etwas mehr" kann beliebig klein gemacht werden, indem man die Kantenlänge der abzuschneidenden Pyramiden beliebig nahe an a heranführt.)

b) Da ein gerader Schnitt durch ein konvexes n-Eck die Anzahl der Ecken höchstens um 1 erhöhen kann (und dies auch nur tut, wenn er durch das Innere zweier benachbarter Seiten verläuft), müssen die die Würfelecken abtrennenden ebenen Schnitte jede Würfelkante in drei Abschnitte einteilen: Die jeweils an einer Würfelkante angrenzenden Abschnitte einer Kante gehören dann zum diese Ecke enthaltenden Teilkörper, während der jeweils mittlere Abschnitt Kante des Restkörpers ist. Insbesondere liegen also auf jeder Kante des ursprünglichen Würfels nun zwei benachbarte Eckpunkte der entstehenden Achtecke des Restkörpers.

Zeichnet man in ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck ein, dessen Eckpunkte alle auf den Seiten des Quadrats liegen, dann geht die Figur sowohl durch Drehung um 90° um den Mittelpunkt des Quadrats als auch durch Spiegelung an einer Mittelparallele zweier gegenüberliegender Seiten des Quadrats in sich selbst über, da sowohl Quadrat als auch regelmäßiges Achteck diese Symmetrien besitzen. Also sind alle entsprechenden Strecken gleich lang.

Sei die Würfelkante AB durch die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 in der Reihenfolge AS_1S_2B in drei Abschnitte geteilt, sodass regelmäßige Achtecke auf den Würfelflächen mit Kantenlänge $|S_1S_2|$ entstehen. Dann ist nach der vorherigen Überlegung $b := |AS_1| = |S_2B|$ und $|S_1S_2|$ die Länge der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten genau die Länge b besitzen. Damit ergibt sich

$$a = |AB| = 2 \cdot b + \sqrt{2} \cdot b \qquad \text{also} \qquad b = \frac{1}{2+\sqrt{2}}a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

Weiterhin überschneiden sich wegen $b \leq \frac{1}{2}a$ die abzuschneidenden dreiseitigen Pyramiden mit Kantenlängen b nicht und haben jeweils ein Volumen von

$$\frac{1}{6}b^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^3}{8}a^3 = \frac{8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2}}{48}a^3 = \frac{20 - 14\sqrt{2}}{48}a^3$$

sodass der Restkörper ein Volumen von

$$a^3 - 8 \cdot \frac{10 - 7\sqrt{2}}{24}a^3 = \frac{3 - 10 + 7\sqrt{2}}{3}a^3 = \frac{7}{3} \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot a^3$$

hat.

c) Wie schon in Teil b) gesehen, kann pro Schnitt durch eine der Würfelseiten die Anzahl der Ecken dieser Fläche nur um höchstens 1 erhöht werden. Also sind maximal Achtecke als aus den Würfelseiten entstehenden Flächen des Restkörpers möglich. Ein gleichseitiges Dreieck ist dabei nicht möglich zu erhalten, da dafür mindestens eine Kante des Würfels komplett entfernt werden müsste, da ein solches nie zugleich alle vier Seiten des Quadrats berühren kann. Neben $n = 4$ und $n = 8$ sind also noch die Fälle $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$ zu betrachten. In allen Fällen müssen auf mindestens einer Kante zwei verschiedene Eckpunkte eines solchen regelmäßigen n-Ecks liegen.

Gibt es mindestens zwei Seiten eines Quadrats, auf denen je zwei der Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks liegen, sind die beiden durch diese Eckpunkte gebildeten Seiten des n-Ecks entweder parallel oder senkrecht zueinander. Derartige Seiten gibt es im regelmäßigen Siebeneck aber nicht, sodass $n = 7$ ausgeschlossen werden kann.

Im Fall des Sechsecks verläuft die gemeinsame Mittelparallele zwei gegenüberliegender Sechseckseiten durch den Diagonalenschnittpunkt. Insbesondere müsste die Figur des dem Quadrat einbeschriebenen Sechsecks spiegelsymmetrisch zu dieser Achse sein, sodass die Eckpunkte des Sechsecks, die nicht auf den beiden Quadratseiten mit je zwei Sechseck-Eckpunkten liegen, durch die Spiegelung auf den jeweils anderen abgebildet werden müssten. Damit betrüge die Länge der Diagonalen genau a und die Kantenlänge des Sechsecks $\frac{1}{2}a$.

An den Quadratecken ergäben sich aber nun aus Symmetriegründen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlänge $\frac{1}{4}a$ und Hypotenusenlänge = Sechseck-Seitenlänge $\frac{1}{2}a$, was aber dem Satz von Pythagoras widerspricht. Demzufolge kann es auch der Fall $n = 6$ ausgeschlossen werden.

Bleibt noch zu betrachten, ob regelmäßige Fünfecke möglich sind. Gäbe es ein solches, dass einem Quadrat einbeschrieben ist, so müsste die Höhe des Punktes, dass der Kante des Fünfecks, welche auf einer Quadratseite liegt, gegenüberliegt, auf eben jene gegenüberliegende Kante des Fünfecks parallel zu einer Quadratseite zwei gegenüberliegende Quadratseiten verbinden, also die Länge a haben.

Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an dieser Höhe überführt die Figur in sich selbst) ist aber auch die Verbindungslinie der zwei übrigen Eckpunkte des Fünfecks parallel zu zwei gegenüberliegenden Quadratseiten (nun dem anderen Paar) und verbindet auch zwei Punkte auf diesen, hat also genauso die Länge a. Im regelmäßigen Fünfeck verläuft aber die Höhe eines Punktes auf die gegenüberliegende Fünfeckseite durch keinen der beiden Eckpunkte dieser Seite, sodass die Diagonalen alle länger sind als diese Höhen. So ist auch dieser Fall auszuschließen.

Es verbleiben die in a) und b) betrachteten Fälle mit $n = 4$ bzw. $n = 8$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 041222:
Es ist:

$$1049 \cdot 58 = 60842 = 31 \cdot 1965 - 73.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} z_n &= 73^n + 1049 \cdot 58^n \\ &= 73^n + (31 \cdot 1965 - 73) \cdot 58^{n-1} \\ &= 73(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}. \end{aligned}$$

Da $n - 1 = 2k$ eine gerade Zahl mit $k \geq 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} 73^{n-1} - 58^{n-1} &= (73^2)^k - (58^2)^k \\ &= 5329^k - 3364^k. \end{aligned}$$

Diese Zahl ist durch $5329 - 3364 = 1965$ teilbar. Also ist auch z_n durch 1965 teilbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 041223:
Es ist

$$\begin{aligned} a^4 - 4ac^3 + 3c^4 &= a^4 - 2a^2c^2 + c^4 + 2a^2c^2 - 4ac^3 + 2c^4 \\ &= (a^2 - c^2)^2 + 2c^2(a^2 - 2ac + c^2) \\ &= (a^2 - c^2)^2 + 2c^2(a - c)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = c$ ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 041224:
Es ist

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = \cot \frac{x-y}{2},$$

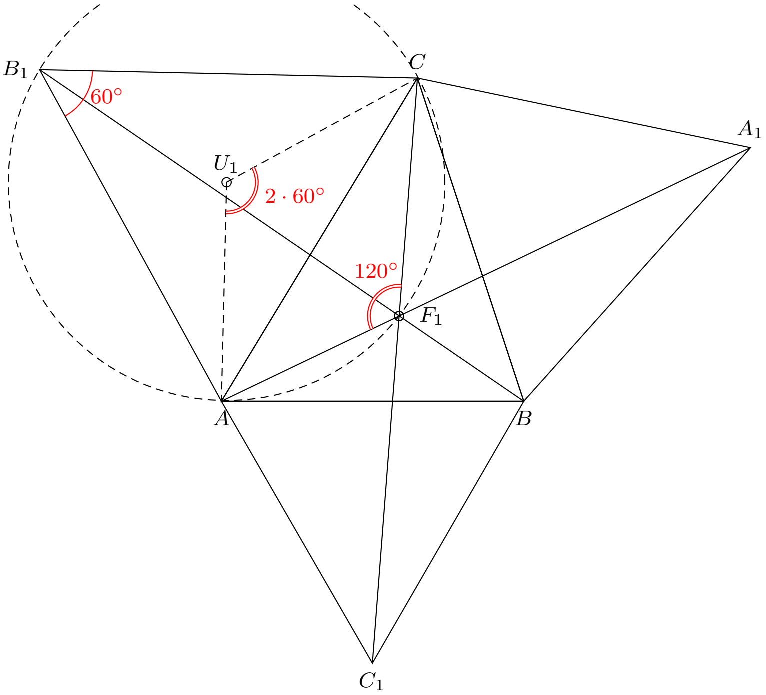
da wegen $x + y = 90°$ hier $\sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

Ferner ist $\frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} - \left(45° - \frac{x}{2}\right) = x - 45°$. Also ist das Gleichheitszeichen für alle x und y erfüllt, für die $\cot(x - 45°) = \frac{5}{3}$ und $y = 90° - x$ ist. Man erhält dann $x - 45° \approx 31° + k \cdot 180°$ (k ganzzahlig).

$$x \approx 76° + k \cdot 180°$$
$$y \approx 14° - k \cdot 180°$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 041225:



Es handelt sich um den 1. Fermat-Punkt.

Diesen erhält man, indem man über allen Dreiecksseiten gleichseitige Dreiecke konstruiert.

Und die neu entstandenen Ecken A_1, B_1, C_1 mit den gegenüberliegenden Ecken A, B, C des Ausgangsdreiecks.

Zum Beweis, dass es sich um das isogonische Zentrum handelt betrachten wir ein Teildreieck ACB_1, dessen Umkreis mit Zentrum U_1 und das Poly-Drachenviereck AF_1CB_1. Dabei nutzen wir, dass der Mittelpunktswinkel doppelt so groß ist wie der Umfangswinkel (Kreiswinkelsatz).

Die Überlegung für die anderen Teildreiecke verläuft analog.

Aufgeschrieben und gelöst von Hyperplot

Lösung 041226:

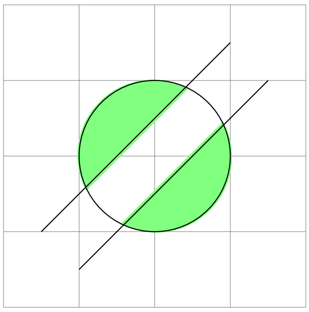


Abbildung von TomTom314

Die gesuchte Fläche sind zwei Kreissegmente des Kreises mit dem Radius r und mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt M.

Die Sehne des ersten Kreissegments liegt auf der Gerade $y = x + \frac{x}{2}$ und das Segment liegt oberhalb dieser Geraden. Die Sehne des zweiten Segments liegt auf der Gerade $y = x - \frac{x}{2}$, das Segment liegt unterhalb.

Es ist $|x - y| > \frac{r}{2} \iff x - y > \frac{r}{2}$ oder $x - y < -\frac{r}{2} \iff y < x - \frac{r}{2}$ oder $y > x + \frac{r}{2}$.

Folglich gehören nur solche Punkte (x, y) zur Menge, die unterhalb der Gerade $y = x - \frac{r}{2}$ oder oberhalb der Geraden $y = x + \frac{r}{2}$ liegen.

Zur Berechnung der Eckpunkte:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = x + \frac{r}{2} \cdot q; q \in \{-1; +1\}$$

Dadurch ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + (x + \frac{r}{2} \cdot q)^2 &= 1 \\ x^2 + (x^2 + q \cdot r \cdot x + \frac{r^2}{4}) &= 1 \\ x^2 + \frac{q}{2} \cdot rx - \frac{3}{8} \cdot r^2 &= 1 \\ x = r \cdot (-\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}); \quad k \in \{-1; 1\} \\ y = r \cdot (\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}) \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Caban

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission