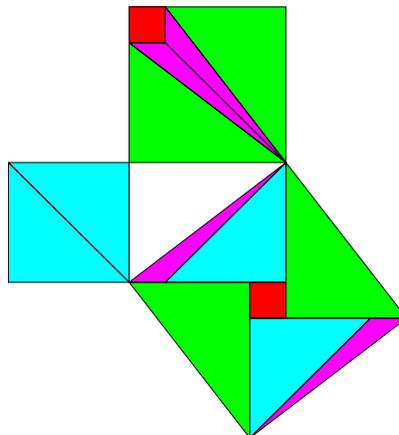
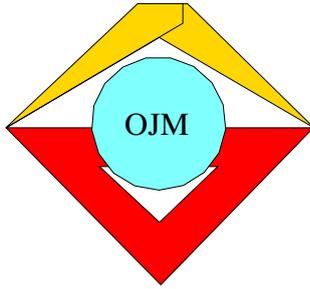




4. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen





4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 041231:

In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a , die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:

- 1) a ist eine rationale Zahl.
- 2) a ist eine ganzzahlige Zahl, die durch 14 teilbar ist.
- 3) a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
- 4) a ist eine ganzzahlige Zahl, die durch 7 teilbar ist.
- 5) a ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8000$.
- 6) a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, daß von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Wie lautet die Zahl a ? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Aufgabe 041232:

Es sei $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit reellen Zahlen a, b, c, d als Koeffizienten ($c \neq 0$).

Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \rightarrow y = f(x)$ eine Funktion definiert? Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a, b, c, d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

Aufgabe 041233:

Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B , die nicht auf g , jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen.

Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d.h. für den $\sphericalangle APB \geq \sphericalangle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Aufgabe 041234:

Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$

erfüllt?



Aufgabe 041235:

Gibt es eine natürliche Zahl z , die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

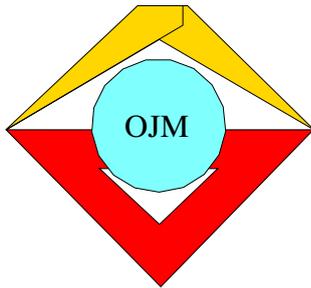
$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Aufgabe 041236:

Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d.h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.

Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in *einer* Ebene oder auf der Oberfläche *einer* Kugel liegen.



4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 041231:

Die Zahl lautet 7. Mit folgenden Überlegungen kann die Zahl eindeutig bestimmt werden:

Angenommen, die Zahl wäre nicht ganzzahlig (= ganzrational).

Dann sind die Aussagen 2, 4 und 6 falsch und die Aussagen 1, 3 und 5 müssten wahr sein. Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 13 ist, können aber Aussagen 1 und 3 nicht gleichzeitig wahr sein.

Die Annahme ist also falsch.

Demnach ist die gesuchte Zahl a ganzzahlig. Die Aussage 3 ist daher falsch und Aussage 4 ist somit richtig. Außerdem ist Aussage 1 richtig und Aussage 2 falsch. Eine durch 7 teilbare Zahl, die nicht durch 14 teilbar ist, muss ungerade sein. Die Aussage 6 ist daher falsch und die Aussage 5 ist richtig.

Die Zahl a ist also ganzzahlig und somit auch rational, ungerade und es gilt

$$0 < a^3 + a < 8000 \tag{1}$$

Wäre a negativ, so wäre auch $a^3 + a$ negativ im Widerspruch zu (1).

Für $a \geq 0$ folgt aus (1) $a^3 \leq a^3 + a < 8000$, also $a \leq 20$. Im Bereich 0 bis 20 gibt es nur eine durch 7 teilbare ungerade Zahl, nämlich $a = 7$.

Tatsächlich sind für $a = 7$ die Aussagen 1, 4 und 5 wahr ($0 < 7^3 + 7 = 350 < 8000$) und die Aussagen 2, 3 und 6 sind falsch.

Aufgeschrieben und gelöst von Kitaktus

Lösung 041232:

Die erste Frage ist etwas eigenwillig formuliert. Gefragt ist vermutlich nach dem maximalen Definitionsbereich innerhalb der reellen Zahlen.

Der Nenner darf nicht 0 sein, es muss also $cx \neq -d$ bzw. $x \neq -\frac{d}{c}$ gelten ($c \neq 0!$).

Für alle anderen reellen x ist der Zähler definiert und der Nenner ungleich 0, so dass der Quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$ definiert ist.

Der maximale Definitionsbereich ist demnach $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Es gilt

$$ax + b = \frac{a}{c} \cdot (cx + d) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)$$



$f(x)$ lässt sich daher umschreiben zu

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{\frac{a}{c} \cdot (cx + d)}{cx + d} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d}$$

Es seien x_1 und x_2 beliebige reelle Zahlen mit $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$ oder $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_1 + d} > \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_2 + d} \Leftrightarrow \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_1 + d} > \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_2 + d}$$

Multiplikation mit $(cx_1 + d)(cx_2 + d)$, was in beiden Fällen positiv ist, ergibt:

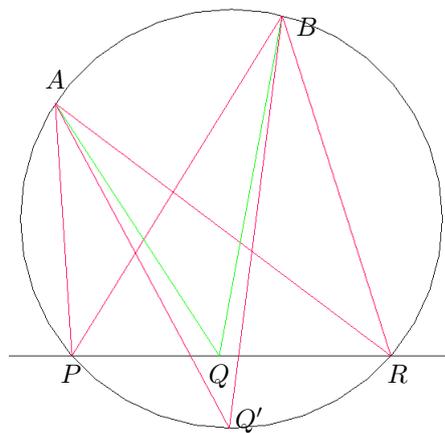
$$\begin{aligned} f(x_1) > f(x_2) &\Leftrightarrow \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot (cx_2 + d) > \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot (cx_1 + d) \\ &\Leftrightarrow \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot c \cdot (x_2 - x_1) > 0 \\ &\Leftrightarrow (bc - ad) > 0 \quad (\text{da } x_2 - x_1 > 0). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also genau dann in den beiden Intervallen $(-\infty, -\frac{d}{c})$ und $(-\frac{d}{c}, \infty)$ streng monoton fallend, wenn $bc > ad$ gilt.

Aufgeschrieben und gelöst von Kitaktus

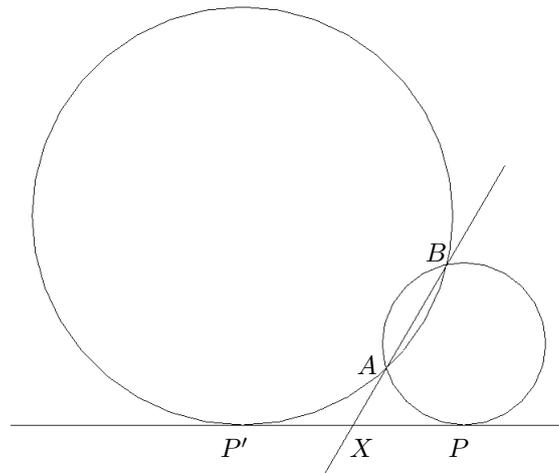
Lösung 041233:

Auch wenn es in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt wird, können wir annehmen, dass A und B verschieden sind, denn sonst ist $\sphericalangle APB = 0$ für alle $P \in g$ und die Aufgabe ziemlich sinnlos. Wenn P auf der Geraden AB liegt, dann ist $\sphericalangle APB = 0$, was nicht maximal ist. Also liegt der gesuchte Punkt nicht auf AB , so dass es einen eindeutigen Kreis k durch A , B und P gibt.



Angenommen, k schneidet g in einem weiteren Punkt R wie in der obigen Abbildung. Nach Peripheriewinkelsatz ist $\sphericalangle APB = \sphericalangle ARB = \sphericalangle AQ'B$, und wegen $\sphericalangle BAQ < \sphericalangle BAQ'$ und $\sphericalangle ABQ < \sphericalangle ABQ'$ ist $\sphericalangle AQB > \sphericalangle AQ'B = \sphericalangle APB$, also erfüllt P nicht die verlangte Bedingung.

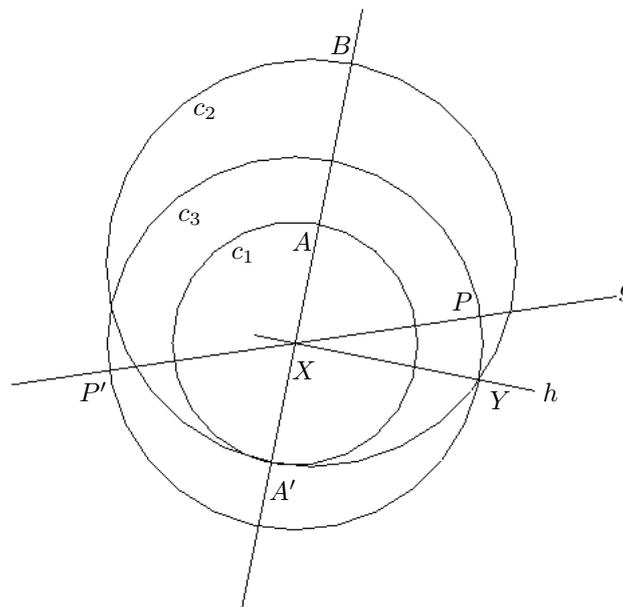
Der gesuchte Punkt P ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass der Kreis k durch A , B und P die Gerade g in P berührt. Dieser Sonderfall des Apollonischen Kreisproblems hat i.A. zwei Lösungen. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel.



Speziell zu behandeln ist der Fall, dass AB parallel zu g ist. Dann kann nur ein A und B enthaltender Kreis g berühren, der Berührungspunkt P ist wegen der Symmetrie der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} mit g .

Im folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall, dass AB nicht parallel zu g ist, so dass ein eindeutiger Schnittpunkt X von AB und g existiert. Da A und B nach Voraussetzung auf der gleichen Seite von g liegen, liegt X außerhalb jedes A und B enthaltenden Kreises k (wie in obiger Abbildung). Da g eine Tangente an k im gesuchten Punkt P sein soll und X enthält, muss $XA \cdot XB = XP^2$ gelten (allgemeiner Satz über Sehnen und Tangenten). Der gesuchte Punkt P liegt demnach im berechenbaren Abstand $\sqrt{XA \cdot XB}$ von X auf g . Es gibt zwei solche Punkte P und P' , die lokale Maxima des Winkels sind, unter dem AB erscheint. Das globale Maximum liegt in dem Punkt P , für den der Kreis k kleiner ist, also so, dass $\sphericalangle PXA < \sphericalangle P'XA$. Im symmetrischen Sonderfall, dass AB senkrecht zu g ist, ist der Winkel in beiden Punkten gleich groß, d.h. es gibt zwei verschiedene Lösungen.

Da wir nun wissen, wie der Punkt P berechnet wird, können wir ihn auch wie folgt konstruieren. Die Abbildung zeigt die wesentlichen Konstruktionsschritte, ein paar Hilfskonstruktionen wurden zur Übersichtlichkeit weggelassen.





1. Schneide die Gerade AB mit g , der Schnittpunkt sei X (der Fall, dass AB parallel zu g ist, wurde oben behandelt und hier ausgeschlossen). In der Abbildung liegt A zwischen X und B , was o.B.d.A. angenommen werden kann, aber auch keinen Unterschied macht.
2. Schlage um X einen Kreis c_1 durch A , der von A verschiedene Schnittpunkt mit AB sei A' .
3. Konstruiere den Thaleskreis c_2 durch A' und B . Dazu lege man einen Kreis um A' durch B und einen Kreis um B durch A' und verbinde die beiden Schnittpunkte dieser Kreise. Der Schnitt der Verbindungsgeraden mit $A'B$ ist der Kreismittelpunkt (diese beiden Hilfskreise und die Verbindungsgerade sind in der Abbildung nicht gezeichnet).
4. Konstruiere die Gerade h , die X enthält und senkrecht zu AB ist. Da $XA = XA'$, ist h die Mittelsenkrechte von A und A' , also gehe man vor wie bei der Konstruktion von c_2 (die beiden Hilfskreise sind wieder in der Abbildung weggelassen).
5. Y sei ein Schnittpunkt von h und c_2 (es ist egal, welchen von beiden man verwendet). Da Y auf dem Thaleskreis von A' und B liegt, hat das Dreieck $A'BY$ in Y einen rechten Winkel. Ferner ist h die Höhe des Dreiecks durch Y und X der Fußpunkt dieser Höhe. Nach dem Höhensatz von Euklid gilt $XY^2 = XA' \cdot XB = XA \cdot XB$ wegen $XA = XA'$.
6. Schlage um X einen Kreis c_3 durch Y . Die Schnittpunkte des Kreises mit g sind die Punkte P und P' , denn $XP = XP' = XY = \sqrt{XA \cdot XB}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041234:

Wegen $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot x$ und $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x$ ist

$$\tan^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cot^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan^2 x + \cot^2 x,$$

und wegen $\tan(\frac{\pi}{4} \pm x) = \cot(\frac{\pi}{4} \mp x)$ ist

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

d.h. $\tan^2 x + \cot^2 x$ ist $\frac{\pi}{2}$ -periodisch und symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{4}$. Wir müssen daher Lösungen von $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ nur im Intervall $I = (0, \frac{\pi}{4}]$ suchen (0 ausgeschlossen wegen Definitionslücke).

Die gegebene Gleichung ist

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &= 6 \\ \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 6 \sin^2 x \cos^2 x \\ \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x &= 6(1 - \cos^2 x) \cos^2 x \\ \Leftrightarrow 2 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1 &= 6 \cos^2 x - 6 \cos^4 x \\ \Leftrightarrow \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da \cos auf I positiv ist. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ hat keine Lösung in I , weil \cos auf I streng monoton fällt und $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ gilt. Also hat die Ausgangsgleichung in I nur eine



Lösung, nämlich

$$x = \arccos \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\cos \frac{\pi}{8} = \cos \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2}}.$$

Wegen der anfangs genannten Symmetrie und Periodizität ist die Menge aller reellen Lösungen

$$\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right\} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z} = \left\{ \pm \frac{\pi}{8}, \pm \frac{3\pi}{8}, \pm \frac{5\pi}{8}, \dots \right\}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041235:

Angenommen, $z = x! + y! = a! + b!$ mit $a \neq 0$ und $x \neq a \leq b$. Aufgrund der gleichen Gestalt beider Gleichungen kann man o.B.d.A. $a < x$ wählen.

Ausklammern liefert

$$z = x! \left(1 + \frac{y!}{x!}\right) = a! \left(1 + \frac{b!}{a!}\right)$$

Division beider Gleichungen ergibt

$$1 = \frac{(a+1) \cdots x \left(1 + \frac{y!}{x!}\right)}{\left(1 + \frac{b!}{a!}\right)}$$

Der Quotient kann aber nicht 1 sein, da keiner der Primfaktoren von $a+1$ im Divisor $1 + \frac{b!}{a!} = 1 + (a+1) \cdots b$ enthalten ist (beachte, dass wegen $a < x$ auch $a < b$ gelten muss).

Damit kann es keine solche zweite Darstellung von z als Summe zweier Fakultäten geben.

Aufgeschrieben und gelöst von Kornkreis

Lösung 041236:

Vorbemerkung: daraus, dass die drei Kreise paarweise genau einen gemeinsamen Punkt haben und die drei Berührungspunkte verschieden sind, folgt insbesondere, dass kein Kreis zu einem Punkt degeneriert ist und keine zwei Kreise identisch sind.

Die Kreise bezeichnen wir als k_1, k_2, k_3 , den Punkt $k_1 \cap k_2$ als P_{12} , die gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 in P_{12} als t_{12} . Analog sind P_{23}, P_{13}, t_{23} und t_{13} definiert.

Zunächst nehmen wir an, dass zwei der Kreise in einer Ebene liegen, o.B.d.A. seien dies k_1 und k_2 . In dieser Ebene müssen dann auch die Geraden t_{13} und t_{23} liegen. Sie müssen verschieden sein, denn sonst würde die Gerade $t_{13} = t_{23}$ den Kreis k_3 in den beiden verschiedenen Punkten P_{13} und P_{23} berühren, was nicht möglich ist. Also hat die k_3 enthaltende Ebene zwei verschiedene Geraden mit der k_1 und k_2 enthaltenden Ebene gemeinsam. Das ist nur dann möglich, wenn beide Ebenen identisch sind. Wenn also zwei der drei Kreise in einer Ebene liegen, dann liegen alle drei Kreise in dieser Ebene.

Nun betrachten wir den Fall, dass keine zwei Kreise in einer gemeinsamen Ebene liegen. Zu zeigen ist, dass dann alle drei Kreise auf einer einzigen Kugel liegen. E_{12} sei die zu t_{12} senkrechte Ebene durch P_{12} , d.i. die gemeinsame Symmetrieebene von k_1 und k_2 . Für $i = 1, 2, 3$ sei die „Mittelsenkrechte“ m_i des Kreises k_i die Menge aller Punkte, die von jeweils allen Punkten des Kreises den gleichen Abstand haben, d.i. die Gerade senkrecht zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt. Da k_1 und k_2 symmetrisch zu E_{12} liegen, enthält E_{12} die Geraden m_1 und m_2 . Diese Geraden sind nicht parallel (und insbesondere nicht identisch), da sonst



die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 parallel und somit gleich wären, und schneiden sich daher in genau einem Punkt M_{12} . Nach Konstruktion hat M_{12} sowohl von allen Punkten aus k_1 als auch von allen Punkten aus k_2 den gleichen Abstand. Da die Kreise k_1 und k_2 einen Punkt gemeinsam haben, hat M_{12} von allen Punkten aus $k_1 \cup k_2$ den gleichen Abstand, den wir als r_{12} bezeichnen.

Völlig analog schneiden sich m_2 und m_3 in einem Punkt M_{23} , der von allen Punkten aus $k_2 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{23} hat, und m_1 und m_3 schneiden sich in einem Punkt M_{13} , der von allen Punkten aus $k_1 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{13} hat. Wenn die drei Punkte M_{12} , M_{23} und M_{13} nicht paarweise verschieden sind, dann sind sie alle drei gleich (denn z.B. aus $M_{12} = M_{23}$ folgt, dass m_1 den Punkt $m_2 \cap m_3$ enthält), so dass $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. Dann liegen alle drei Kreise auf der Kugel mit Radius r_{12} um M_{12} .

Dass die Punkte M_{12} , M_{23} und M_{13} immer gleich sind, zeigen wir durch einen indirekten Beweis, indem wir annehmen, dass sie paarweise verschieden sind. M_{23} und M_{13} liegen auf m_1 bzw. m_2 und damit in der von diesen Geraden aufgespannten Ebene E_{12} . m_3 hat also zwei verschiedene Punkte mit dieser Ebene gemeinsam und liegt daher in dieser Ebene, die folglich mit den analog definierten Ebenen E_{23} und E_{13} identisch ist. Damit liegen außer P_{12} auch die Punkte P_{23} und P_{13} in dieser Ebene $E = E_{12} = E_{23} = E_{13}$. Da E mit jedem der Kreise nur zwei Punkte gemeinsam hat und von diese sechs Punkte jeweils zwei als Berührungspunkt zusammenfallen, besteht der Schnitt von E mit den Kreisen genau aus den drei verschiedenen Punkten P_{12} , P_{23} und P_{13} , und die Geraden m_1 , m_2 und m_3 sind die Mittelsenkrechten des von den drei Berührungspunkten gebildeten Dreiecks. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich jedoch immer in einem einzigen Punkt. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass M_{12} , M_{23} und M_{13} paarweise verschieden sind. Also tritt der oben genannte Fall ein, dass diese drei Punkte gleich sind und die drei Kreise auf einer Kugel liegen.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller