5. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050611:

Aus Leipzig und Dresden (Entfernung 119 km) fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab. Der Radfahrer aus Leipzig fährt nach Dresden, der aus Dresden nach Leipzig. Der eine von ihnen legt 15 km, der andere 20 km in der Stunde zurück.

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Radfahrern nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?

b) Wie weit sind sie von beiden Städten entfernt, wenn sie einander treffen?

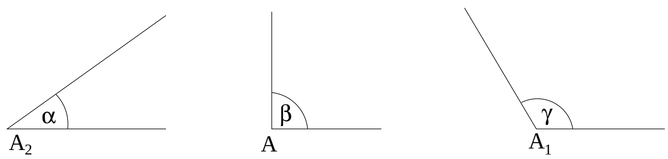
Aufgabe 050612:

Eine zweistellige natürliche Zahl soll auf Grund folgender Bedingungen ermittelt werden:

Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu der dadurch entstehenden Zahl die Zahl 1, so erhält man das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 050613:

Gegeben sind die Winkel α, β und γ (siehe Abbildung)



a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!

b) Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 050614:

In einem Betrieb sollen 1 600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden. Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050611:

a) Der eine Radfahrer hat nach $2\frac{1}{2}$ Std. insgesamt $2\frac{1}{2} \cdot 20\,\text{km} = 50\,\text{km}$, der andere in der gleichen Zeit $2\frac{1}{2} \cdot 15\,\text{km} = 37,5\,\text{km}$ zurückgelegt. Nach $2\frac{1}{2}$ Std. beträgt daher ihre Entfernung voneinander (in Kilometern) $119 \cdot (50 + 37,5) = 31,5$.

b) In $\frac{1}{5}$ Std., also in 12 min fährt der eine Radfahrer 3 km, der andere 4 km. Beide legen also in 12 min zusammen 7 km zurück. Daher treffen sie einander nach $\frac{119}{7} \cdot 12\,\text{min} = 17 \cdot 12\,\text{min}$. In dieser Zeit hat der eine Radfahrer $17 \cdot 3\,\text{km}$, der andere $17 \cdot 4\,\text{km}$ zurückgelegt. Der Treffpunkt liegt also 51 km von der einen und 68 km von der anderen Stadt entfernt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 050612:

Bezeichnet man die Anzahl der Zehner mit a und die der Einer mit b, dann lautet die erste Zahl $(10a + b)$ und die zweite $(10b + a)$.

Nach Aufgabe gilt:

$$a + b = 10 \qquad \text{und} \tag{1}$$
$$2(10a + b) = (10b + a) + 1. \tag{2}$$

Die linke Zahl in (2) ist gerade. Wäre a gerade, so wäre die rechte Zahl ungerade. Also muß a ungerade und damit (wegen $a + b = 10$) auch b ungerade sein.

Die rechte Seite von (2) ist höchstens gleich $10b + 10$. Wäre a größer oder gleich b, dann wäre die linke Seite mindestens gleich

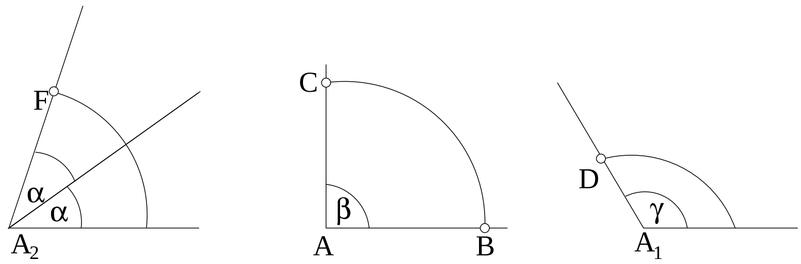
$$2(10b + b) = 22b = 10b + 12b.$$

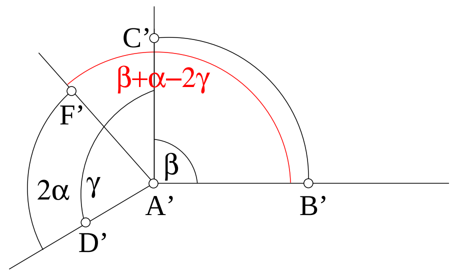
Das ist aber (wegen $b \geq 1$) sicher größer als $10b + 10$, daher muß b größer als a sein. Es kommen als Lösung mithin nur die beiden Zahlenpaare $a = 1$; $b = 9$ und $a = 3$; $b = 7$ in Betracht. Durch Probieren findet man sofort, daß $a = 3$; $b = 7$ das einzige Zahlenpaar ist, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die gesuchte Zahl lautet also 37.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 050613:

a) siehe Abbildung:





b) Konstruktionsbeschreibung:

Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt A'. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt A und um A' je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius. Der Kreisbogen um A schneidet die Schenkel des Winkels β in den Punkten B und C. Der Kreisbogen um A' schneidet den Strahl im Punkt B'. Dann schlage ich um B' mit BC als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch B' in C' schneidet. Ich verbinde A' mit C'. Dann ist $\sphericalangle B'A'C'$ der verlangte Winkel β.

Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt A' an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel γ an. Dabei erhalte ich (siehe Abb.) den Punkt D'.

Schließlich trage ich in A' an $A'D'$ im Uhrzeigersinne den Winkel 2α an (der Winkel 2α wurde vorher in der für den Winkel $(\beta + \gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt F'.

Der Winkel $\sphericalangle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta - \gamma - 2\alpha)$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 050614:

Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, daß ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1\,600$. Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genausoviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volummen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1 600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Quellenverzeichnis

(13) "a+b = b+a" - Heft 52, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 5/6 - Dokumentation I.-XII. Olympiade (1961-1972), Mathematischer Lesebogen vom Rat des Stadtbezirks Leipzig Südost, Abteilung Volksbildung, J. Lehmann und W. Unze, 1973.