



5. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen





5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

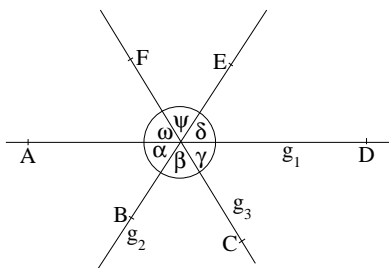
Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 050621:

In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1 920 Tische.

Wieviel Tische wurden im Juni und wieviel im Dezember hergestellt?

Aufgabe 050622:



Die drei Geraden g_1 , g_2 und g_3 schneiden einander im Punkt M . Dabei entstehen Winkel mit den Maßen α , β , γ , δ , ψ und ω (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn

- (1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252^\circ$ und
- (2) α dreimal so groß wie β ist?

Aufgabe 050623:

Gesucht ist eine natürliche Zahl b , die folgenden Bedingungen genügt:

- (1) $40 < b < 600$;
- (2) b ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,
- (3) b ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,
- (4) b läßt bei der Division durch 11 den Rest 6.

Wieviel solche Zahlen gibt es?

Aufgabe 050624:

Die Schüler Eva, Renate, Monika, Ingrid, Jürgen, Hans und Gerd haben sich in einer Reihe der Größe nach aufgestellt. Der größte steht vorn, und von zwei gleichgroßen steht der, dessen Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor dem anderen. Folgendes ist bekannt:

- (1) Es ist wahr, daß Ingrid 2 cm kleiner als Monika ist.
- (2) Es ist falsch, daß Eva nicht dieselbe Größe wie Gerd besitzt.
- (3) Es ist nicht wahr, daß keiner dieser Schüler kleiner als Hans ist.



- (4) Es ist wahr, daß Jürgen kleiner als Ingrid, aber größer als Hans ist.
- (5) Es ist unwahr, daß Hans größer als Monika ist.
- (6) Es ist nicht falsch, daß Monika 2 cm größer als Gerd und auch größer als Jürgen ist.

Es soll festgestellt werden:

- a) Welche Schüler sind gleich groß?
- b) Wie lautet die Reihenfolge der Vornamen, in der sich die Schüler aufgestellt haben? (Man beginne beim größten Schüler.)



5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 050621:

Wenn die monatlich hergestellte Anzahl Tische im Juni j beträgt, dann wurden im Mai $j - 10$ Tische hergestellt, im April $j - 20$ u.s.w. bzw. im August $j + 10$ u.s.w.

Damit ergibt sich eine Jahresproduktion von:

$$\begin{aligned}1920 &= (j - 50) + \dots + (j - 10) + j + (j + 10) + \dots + (j + 50) + (j + 60) \\1920 &= 12 \cdot j + 60 \\1860 &= 12 \cdot j \\j &= 155.\end{aligned}$$

Im Juni wurden 155 Tische hergestellt. Im Dezember sind dies $j + 60 = 215$ Stück.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 050622:

Ein voller Winkel beträgt 360° , d.h es gilt: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega = 360^\circ$. Setzt man nun die Gleichungen (1) und (2) nacheinander ein, erhält man einen Wert für α :

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega &= 360^\circ \\ \alpha + \beta + 252^\circ &= 360^\circ \\ \alpha + \frac{1}{3}\alpha &= 108^\circ \\ 4 \cdot \alpha &= 324^\circ \\ \alpha &= 81^\circ\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\beta = \frac{\alpha}{3} = 27^\circ$. Ferner ist δ der Scheitelwinkel von α und damit genauso groß wie α , also $\delta = 81^\circ$. Selbiges gilt für ψ und β , also $\psi = 27^\circ$. Die fehlende Differenz zu 360° verteilt sich zu gleichen Teilen auf die Scheitelwinkel γ und ω . Diese Winkel ergeben sich also wie folgt:

$$\begin{aligned}\gamma + \omega &= 360^\circ - \alpha - \beta - \delta - \psi \\ 2 \cdot \gamma &= 360^\circ - 81^\circ - 27^\circ - 81^\circ - 27^\circ \\ \gamma &= 72^\circ.\end{aligned}$$

Und damit wie bereits erwähnt: $\omega = 72^\circ$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel



Lösung 050623:

Da 4 und 9 teilerfremd sind, muß wegen (2) b auch durch $4 \cdot 9 = 36$ teilbar sein. Es wird nun eine Tabelle der infragekommenden Zahlen erstellt, dabei werden nur Zahlen aus dem gemäß (1) geforderten Bereich betrachtet:

$36 \cdot k = b$	$b - 6$	$11 (b - 6) ?$	$8 b ?$	$27 b ?$
72	66	ja	ja	
108	102	nein		
144	138	nein		
180	174	nein		
216	210	nein		
252	246	nein		
288	282	nein		
324	318	nein		
360	354	nein		
396	392	nein		
432	426	nein		
468	462	ja	nein	nein
504	498	nein		
540	536	nein		
576	570	nein		

Wie leicht ersichtlich, ist $b = 468$ die einzige Lösung, die sämtliche Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 050624:

Es seien die Größen aller Kinder durch den ersten Buchstaben ihres Vornamens repräsentiert. Dann gilt:

$$i = m - 2 \tag{1}$$

$$e = g \tag{2}$$

$$j < i \tag{3}$$

$$h < j \tag{4}$$

$$h \leq m \tag{5}$$

$$g = m - 2 \tag{6}$$

$$j < m \tag{7}$$

Außerdem ist Hans nicht der Kleinste.

Es gibt keine direkte Aussage über Renates Größe.

Alle anderen Kinder sind kleiner als Monika: i, j, g, h nach (1), (5), (6), (7) sowie dann e wegen (2).

Mit (3) und (4) gilt: $h < j < i$, also $h < j < i < m$.

Betrachtet man (1), (2) und (6), so ergibt sich: $i = g = e = m - 2$, also insgesamt: $h < j < (e = g = i) < m$. Zieht man noch in Betracht, daß Hans nicht der Kleinste ist, so muß Renate die Kleinste sein. Damit gibt es folgende Reihenfolge: $r < h < j < (e = g = i) < m$.

Also ergeben sich die Antworten:

- a) Die drei Schüler Eva, Gerd und Ingrid sind gleich groß. Alle anderen Schüler haben paarweise verschiedene Größen.
- b) Die Reihenfolge, beginnend beim größtem Schüler lautet: Monika, Eva, Gerd, Ingrid, Jürgen, Hans, Renate.



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel