5. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050721:

Bei den Nahverkehrsbetrieben Rostock kann man Straßenbahnfahrscheine für Erwachsene zu folgenden Preisen kaufen:

(1) Einen Fahrschein an der Zahlbox für 0,20 MDN

(2) Eine Karte mit 6 Fahrabschnitten für 1,00 MDN

(3) Einen Block mit 50 Fahrscheinen für 7,50 MDN
(Die Gültigkeitsdauer ist unbegrenzt)

(4) Eine Monatskarte für beliebig viele Fahrten für 10,00 MDN

Welches ist die kleinste Anzahl von Fahrten (monatlich), bei der für eine Person die Monatskarte am billigsten ist?

Aufgabe 050722:

Untersuche, ob in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen können!

Aufgabe 050723:

Vergleiche die Summe aller dreistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Summe aller dreistelligen nicht durch 4 teilbaren geraden natürlichen Zahlen!

a) Welche der beiden Summen ist größer?

b) Wie groß ist die Differenz der beiden Summen dem Betrage nach?

Aufgabe 050724:

In einen Kreis vom Radius r sind zwei Sehnen mit einem gemeinsamen Endpunkt so eingezeichnet, daß sie einen Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 30°$ bilden.

Wie groß ist die Entfernung der beiden anderen Sehnenendpunkte voneinander?

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050721:

Eine Straßenbahnfahrt kostet

im Falle (1)	20	Pfennig,
im Falle (2)	$16\frac{2}{3}$	Pfennig,
im Falle (3)	15	Pfennig.

Im Falle (3) kosten x Fahrten im Monat genau $15 \cdot x$ Pfennig, während sie im Falle (4) gerade 1000 Pfennig kosten.

Daher ist die Monatskarte bei x Fahrten genau dann am billigsten, wenn $15 \cdot x \geq 1000$ ist; d.h. bei 67 und mehr Fahrten monatlich ist die Monatskarte am billigsten, bei weniger Fahrten nicht.

Die gesuchte Zahl ist daher 67.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050722:

Angenommen, es gäbe ein Dreieck ΔABC, in dem sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β im Punkte S unter einem rechten Winkel schneiden. Dann ergäbe sich aus dem Dreieck ΔASB, daß die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ zusammen 90° und damit α und β zusammen 180° betragen müßten, d.h., zwei Seiten des Dreiecks ΔABC würden parallel verlaufen, was unmöglich ist. Es gibt also kein Dreieck dieser Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050723:

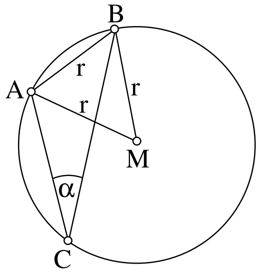
Man vergleicht die beiden ersten Summanden (100 und 102), die beiden zweiten Summanden (104 und 106) u.s.w. bis zu den beiden letzten Summanden (996 und 998). In jedem dieser Paare ist die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite.

a) Die Summe der nicht durch 4 teilbaren dreistelligen geraden Zahlen ist daher größer als die Summe der durch 4 teilbaren dreistelligen Zahlen.

b) Es gibt 225 solcher Paare; die Differenz der betrachteten Summen ist also dem Betrage nach 450.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 050724:



Der gemeinsame Endpunkt der Sehnen sei C, die anderen beiden Endpunkte seien A bzw. B. M sei der Mittelpunkt des Kreises (siehe Abb.)

Dann sind $\sphericalangle BCA$ und $\sphericalangle BMA$ Peripherie- bzw. Zentriwinkel über dem gleichen Bogen oder über zueinander komplementären Bogen. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle BCA$ das Winkelmaß $\alpha = 30°$ hat, hat $\sphericalangle BMA$ ein Winkelmaß von 60°.

Folglich ist das gleichschenklige Dreieck ΔBMA gleichwinklig und damit gleichseitig; also ist $\overline{AB} = r$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.