5. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050921:

Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen a und b, für die $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ gilt.

Aufgabe 050922:

28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil. Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1. Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.

Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil. Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten. Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.

Wieviel Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Aufgabe 050923:

Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:

"Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... ."

a) Wie alt war da die Schwester?

b) Wievielmal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Aufgabe 050924:

In einer Ebene ϵ ist ein Rechteck $ABCD$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ϵ durch A.

Es ist zu beweisen, daß die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser $\overline{PC}$ liegen.

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050921:
Die Gleichung

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$

ist wegen

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3 &= a^3 + b^3 \\ 3a^2b + 3ab^3 &= 0 \\ 3ab \cdot (a+b) &= 0 \\ ab \cdot (a+b) &= 0. \end{aligned}$$

Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist, gilt die angegebene Gleichung genau dann, wenn mindestens eine der drei Bedingungen

a) $a = 0$, b beliebig rational,

b) $b = 0$, a beliebig rational,

c) $a = -b$, b beliebig rational

erfüllt ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 050922:
Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer an allen drei Disziplinen mit y, und die Anzahl derjenigen von ihnen, die nur am Kugelstoßen teilnehmen, mit x, so müssen x und y der folgenden Gleichung genügen:

$$2x + 5y + 6 = 28, \text{ also } 2x + 5y = 22 \tag{1}$$

Daher muß y gerade sein. Da weiter nach Voraussetzung $y \neq 0$ und $x > 1$ gilt, ist (1) nur für $y = 2$ und $x = 6$ erfüllt.

Die Anzahl der Teilnehmer betrug also

beim Kugelstoßen	$2 \cdot 6 + 2 + 6$	$=$	20 Schüler,
beim Weitsprung	$5 \cdot 2 + 6$	$=$	16 Schüler,
beim 100-m-Lauf	$5 \cdot 2 + 6$	$=$	16 Schüler.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 050923:
b = jetztiges Alter des Bruders
s = jetztiges Alter der Schwester
t = jetztiges Alter der Tante
„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin“
$s - (t - (b + s)) = b \Rightarrow t = 2s$
„Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... .“
$s - (t - s) = s - (2s - s) = s - s = 0$

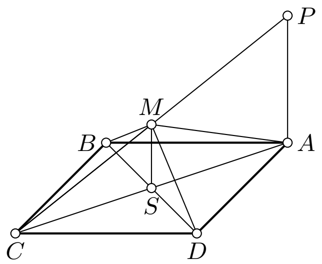
a) Die Schwester wurde gerade geboren.

b) Die Tante ist jetzt doppelt so alt wie die Schwester.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Matthias Lösche

Lösung 050924:
Der Mittelpunkt M der Strecke PC ist der Mittelpunkt der Kugel mit dem Durchmesser PC. Die Punkte A, B und D liegen genau dann auf dieser Kugel, wenn $|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$ ist (siehe Bild).

Zum Beweis dieser Gleichheiten fälle man das Lot von M auf ε. Sein Fußpunkt S liegt wegen $MS \parallel PA$ auf AC. Ferner gilt nach dem 1. Strahlensatz wegen $|CM| = |MP| \Rightarrow |CS| = |SA|$.



Also ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Die Dreiecke CSM, ASM, BSM und DSM sind mithin nach dem Kongruenzsatz (sws) untereinander kongruent.

Daher ist

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|.$$

Die Punkte A, B, C, D und P liegen also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{1}{2}|PC|$, also mit dem Durchmesser PC.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag