5. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050931:

Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl läßt bei Division durch 3 den Rest 1.

Aufgabe 050932:

a) Konstruieren Sie das Dreieck ΔABC, wenn α, a und s_c gegeben sind! Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\sphericalangle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 050933:

Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).

Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in bezug auf die Reihenfolge) endet!

Aufgabe 050934:

Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0.$$

Aufgabe 050935:

In dem Parallelogramm $ABCD$ sei $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{BC} = \overline{AD} = b$, $(a > b)$ und $\overline{AE} = h_a$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A des auf die Seite CD bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist. Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Aufgabe 050936:

Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerken, daß sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.

Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.

Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.

Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.

Die Mutter stellt danach fest, das insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden. Wieviel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050931:

Sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar).
n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als

$$n = 3m + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3m + 2$$

mit passend gewähltem ganzzahligem m. Dann ist

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \qquad \text{oder}$$

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1.

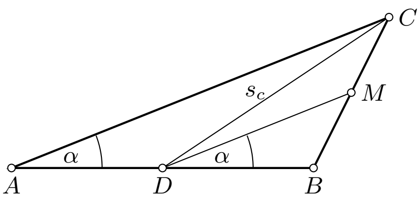
Aufgeschrieben und gelöst von Kitaktus

Lösung 050932:

I. Analyse

Angenommen, ABC sei ein Dreieck der verlangten Art, dann bestehen folgende Lagebeziehungen. Bezeichnet M den Mittelpunkt von BC und D der Mittelpunkt von AB, dann liegt D

1) auf dem Kreis k um C mit dem Radius s_c.
2) auf einem zu α gehörigen Ortskreisbogen $\overset{\frown}{b}$ über BM.



Beweis:

1) gilt aufgrund der Definition des Kreises
2) Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt $DM \parallel AC$ und somit $\sphericalangle BDM \cong \sphericalangle BAC$ (als Stufenwinkel an Parallelen), so dass nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes D auf $\overset{\frown}{b}$ liegt.

Der Punkt A liegt

3) auf dem von B ausgehenden Strahl durch D (ausschließlich B)
4) auf dem Kreis um D mit dem Radius $|BD|$.

Beide Aussagen folgen unmittelbar daraus, dass D Mittelpunkt von AB ist. Daher können A_m, B, C nur dann die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks sein, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion

Man zeichne die Strecke BC der gegebenen Länge a. Danach konstruiere man den Mittelpunkt M von BC. Um C schlage man den Kreis k mit dem gegebenen Radius s_c, und über BM errichte man einen zu α gehörigen Ortskreisbogen $\overset{\frown}{b}$.
Ist D ein gemeinsamer Punkt von k und $\overset{\frown}{b}$, so trage man auf dem von B ausgehenden Strahl durch D von D aus nach der B nicht enthaltenden Seite eine Strecke der Länge $|BD|$ ab, deren zweiter Endpunkt A sei.

III. Satz

Sind A, B, C gemäß II. konstruierbar, so bilden sie die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks.

Beweis:

Nach Konstruktion ist $|BC| = a$, D Mittelpunkt von AB und $|CD| = s_c$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $|\sphericalangle BDM| = \alpha$ und nach dem 1. Strahlensatz und dem Satz über Winkel an geschnittenen Parallelen $\sphericalangle BDM \cong \sphericalangle CAB$, so dass $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ ist.

IV. Determination

Sämtliche Konstruktionsschritte in II. sind, falls D existiert, ausführbar.
Der Punkt D existiert, wenn

$$\begin{array}{ll} 1)\ \alpha \geq 90°; & \frac{a}{2} < s_c < a \\ 2)\ \alpha < 90°; & d - r \leq s_c < d + r \end{array}$$

In allen anderen Fällen existiert D nicht, und es gibt daher kein Dreieck, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (34)

Lösung 050933:
Es sei

$$x = 100c + d, \qquad d = 10a + b$$

und a, b, c natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (100c + d)^2 &= 100\,e + d \qquad e \in \mathbb{N} \\ 10000c^2 + 200cd + d^3 &= 100e + d \\ 100e &= 10000c^2 + 200cd + d^2 - d \\ e &= 100c^2 + 2cd + \frac{d^2 - d}{100} \end{aligned}$$

Es ist e genau dann ganzzahlig, wenn $d(d-1)$ durch 100 teilbar ist. Da d und $d-1$ nicht gleichzeitig durch 5 teilbar sein können, muss einer der beiden Faktoren durch 25 teilbar sein. Wegen $d < 100$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten dafür

d	$d-1$	$100\mid(d^3-d)$
0	-1	ja
1	0	ja
25	24	ja
26	25	nein
50	49	nein
51	50	nein
75	74	nein
76	75	ja

Folgende geordnete Paare (a, b) und nur diese erfüllen die gestellte Bedingung:

$$(0,0); (0,1); (2,5) \text{ und } (7,6).$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 050934:
Die angegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2+b^2} \qquad x_2 = -a - \sqrt{a^2+b^2}$$

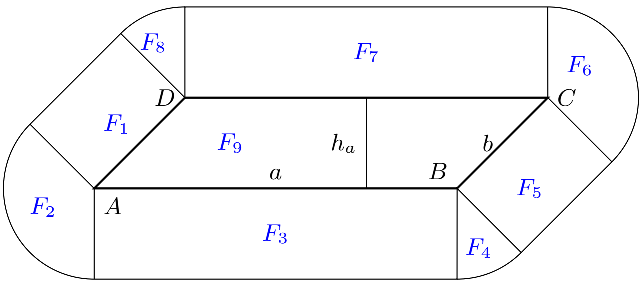
Daraus folgt $|x_2| > |x_1|$ für $a > 0$ und $|x_1| > |x_2|$ für $a < 0$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 050935:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Für $2r \geq h_a$ wird die gesamte Parallelogrammfläche überstrichen.
2. Für $2r < h_a$ wird ein Teil der Parallelogrammfläche nicht überstrichen; es gilt nämlich, wenn h_b die zur Seite BC gehörige Höhenlänge des Parallelogramms $ABCD$ bezeichnet, $ah_a = bh_b$, und somit, weil $a > b$ vorausgesetzt ist, $h_a < h_b$, und daher auch $2r < h_b$.

Im Fall 1) lässt sich überstrichene Fläche F in die Teilflächen F_1 bis F_9 zerlegen.



Dabei sind

(1) F_1 und F_5 Rechtecke mit den Seitenlängen a und r,

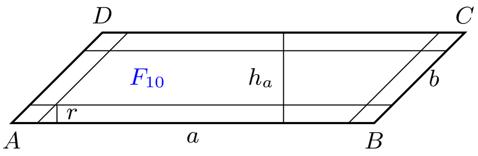
(2) F_3 und F_7 Rechtecke mit den Seitenlängen b und r,

(3) F_2, F_4, F_6 und F_7 Kreissektoren, die im Radius r übereinstimmen und deren Winkel sich zu einem Winkel der Größe 360° ergänzen. Daher kann man die vier Kreissektoren zu einer Kreisscheibe zusammensetzen.

Also gilt für den Flächeninhalt $I(F)$ der überstrichenen Fläche

$$I(F) = 2(I(F_1) + I(F_3)) + I(F_9) + \pi r^2 = 2(ar + br) + \pi r^2 + ah_a$$

Im Fall 2 entstehen außerhalb des Parallelogramms die gleichen Teilflächen wie im Fall 1. Die Fläche des Parallelogramms wird nicht völlig überdeckt. Es bleibt die Fläche F_{10} frei.



F_{10} ist ein Parallelogramm mit der Seitenlänge $(a - 2x)$ und der zugehörigen Höhe $(h_a - 2r)$, wobei x die Seitenlänge eines der Eckrhomben ist.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt $x : r = b : h_a$ und damit $x = \frac{br}{h_a}$.

Also gilt für den Inhalt $F(F')$ der überstrichenen Fläche im Fall 2

$$\begin{aligned} I(F') &= I(F) - I(F_{10}) \\ &= 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - \left(ah_a - 2br - 2ar + \frac{4br^2}{h_a}\right) \\ &= 4 \cdot \left(ar + br - \frac{br^2}{h_a}\right) + \pi r^2 \end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (34)

Lösung 050936:

Bezeichnet man die ursprünglich vorhandene Anzahl Kirschen mit x, so kann man folgende Aufstellung machen: Jürgen nimmt

$$1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3}$$

es verbleiben

$$x - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-2}{3}$$

Renate nimmt

$$2 + \left(\frac{2x-2}{3} - 2\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2x+10}{9}$$

es verbleiben

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{2x+10}{9} = \frac{4x-16}{9}$$

Christine nimmt

$$\frac{4x-16}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4x-16}{27}$$

es verbleiben

$$\frac{4x-16}{9} - \frac{4x-16}{27} = \frac{8x-32}{27}$$

Laut Aufgabe gilt

$$x - \frac{8x-32}{27} = 42$$

und somit $x = 58$. Es befanden sich anfangs 58 Kirschen in der Schüssel.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(34) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band II. Verlag Volk und Wissen, 1975