5. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051021:

Es sei E der Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{DB}$ des Parallelogramms $ABCD$. Punkt F sei derjenige Punkt auf $\overline{AD}$, für den $\overline{DA} : \overline{DF} = 3 : 1$ gilt.

Wie verhält sich das Maß des Flächeninhalts des Dreiecks ΔDFE zu dem des Vierecks $ABEF$, wenn man gleiche Maßeinheiten zugrundelegt?

Aufgabe 051022:

Einem Kreis vom Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Berechnen Sie den Umfang des Zwölfecks!

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks!

c) Um wieviel Prozent ist der Umfang des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Das Ergebnis ist auf eine Stelle nach dem Komma genau anzugeben.)

d) Um wieviel Prozent ist der Flächeninhalt des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Genauigkeit wie bei c)

Aufgabe 051023:

Es ist zu beweisen:

Wenn gilt
$$0 < b < a \qquad (1)$$
$$\text{und } a^2 + b^2 = 6ab \qquad (2)$$
dann ist
$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 051024:

Die 1 007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, daß kein Platz leer bleibt.

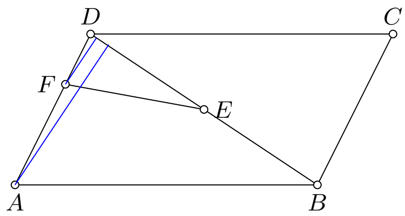
Wieviel Autobusse, jeder Art sind zu bestellen?

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051021:

Die Höhen der Dreiecke DAB bzw. DFE auf g_{DB} bzw. g_{DE} sind zueinander parallel, da die zu diesen Höhen gehörenden Seiten DB bzw. DE der genannten Dreiecke auf derselben Geraden liegen.



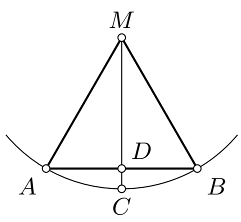
Nach dem 2. Strahlensatz verhalten sich die Längen dieser Höhen aufgrund der Voraussetzung wie 3:1. Ferner verhalten sich die Längen der Grundseiten DB bzw. DE zueinander wie 2:1.

Daher verhalten sich die Flächeninhalte beider Dreiecke wie 6:1. Folglich verhält sich der Flächeninhalt des Dreiecks DFE zu dem des Vierecks $ABEF$ wie 1:5.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (35)

Lösung 051022:

Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Weiter seien C eine Ecke und A und B die beiden benachbarten Ecken des Zwölfecks.



Dann gilt: $r = |MA| = |MC| = |MB| = |AB|$.

AB ist die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks und $MC \perp AB$. $ACBM$ ist wegen $|AM| = |BM|$ und $|AC| = |BC|$ ein Drachenviereck.

a) Die Strecken AB und MC haben einen Schnittpunkt D. Setzt man $|DC >= x$, dann gilt

$$x = r - |MD| = r - \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

MD ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck MAB. Bezeichnet $s = |AC| = |BC|$ die Seitenlänge des Zwölfecks, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck CBD

$$s^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r^2(2-\sqrt{3}) \to s = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Der Umfang des Zwölfecks beträgt daher $12r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt I_1 des Dreiecks MBC. Es gilt

$$I_1 = \frac{1}{2} r \cdot r \sin 30° = \frac{r^2}{4}$$

Der Flächeninhalt $12I_1$ des Zwölfecks beträgt demnach $3r^2$.

c) Es ist

$$12r\sqrt{2\sqrt{3}} : 2r\pi \approx 3,106 : \pi \approx 0989$$

Weil $3,1055^2 < 36(2-\sqrt{3}) < 3,1065^2$ also $3,1055 < 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < 3,1065$ gilt und wegen $3,1415 < \pi < 3,1416$

$$0.9885 \cdot 3,1416 < 3,1055 < 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < 3,1065 < 0.9895 \cdot 3,1415$$

ausfällt. Der Umfang des Zwölfecks ist also um etwa $1,1\%$ kleiner als der des Kreises.

d) Wegen $0,9549 \cdot 3,1416 < 3 < 0,955 \cdot 3,1415$ ist

$$3r^2 : \pi r^2 = 3 : \pi \approx 0,955$$

Der Flächeninhalt des Zwölfecks ist also um etwa $4,5\%$ kleiner als der des Kreises.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (35)

Lösung 051023:

Da a und b von 0 verschieden sind, gilt

$$\frac{6ab + 2ab}{6ab - 2ab} = 2$$

Unter Verwendung von (2) folgt

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = 2$$

Wegen $a > b > 0$ sind $a + b$ und $a - b$ positiv und man kann die Wurzel ziehen und erhält

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{(2)}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Kitaktus

Lösung 051024:

Es gilt

$$20 \cdot 41 + 6 \cdot 29 + 1 \cdot 13 = 820 + 174 + 13 = 1007$$

Es gibt daher eine Lösung, die $20 + 6 + 1 = 27$ Busse benutzt.

Angenommen, es gäbe eine (nichtnegative ganzzahlige) Lösung mit a Bussen mit je 41 Plätzen, b Bussen mit je 29 Plätzen und c Bussen mit je 13 Plätzen für die

$$a + b + c = n \quad \text{(mit ganzzahligem } n \leq 26) \tag{1}$$
$$41a + 29b + 13c = 1007 \tag{2}$$

gilt.

$$41 \cdot (1) - (2) \quad \text{ergibt die Gleichung} \quad 12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \tag{3}$$

Für $n = 26$ vereinfacht sich (3) zu:

$$12b + 28c = 41 \cdot 26 - 1007 = 59 \tag{4}$$

Dabei ist die linke Seite gerade, die rechte aber nicht. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Für $n \leq 24$ ergibt sich aus (3) die Ungleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \leq 41 \cdot 24 - 1007 = -23 \tag{5}$$

Hier gibt es offenbar keine nichtnegativen Lösungen.

Es bleibt also nur noch der Fall $n = 25$. Hier ergibt sich aus (3) die Gleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot 25 - 1007 = 18 \tag{6}$$

Da a, b und c nichtnegative ganze Zahlen sind, muss $c = 0$ sein, da sonst die linke Seite von (6) bereits zu groß wäre.

Es bleibt also die Gleichung $12b = 18$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat.

In allen Fällen führte die obige Annahme zum Widerspruch. Es gibt also keine Lösung, die mit weniger als 27 Bussen auskommt.

Die oben angegebene Lösung mit 27 Bussen benutzt also die kleinstmöglich Anzahl an Bussen.

Aufgeschrieben und gelöst von Kitaktus

Quellenverzeichnis

(35) unbekannt