5. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051031:

Weisen Sie nach, daß alle Zahlen

$$1331; 1030301; 1003003001; \ldots; 1\,\underbrace{00\ldots0}\,3\,\underbrace{00\ldots0}_{\text{jeweils } k \text{ Nullen}}\,3\,\underbrace{00\ldots0}\,1 \quad \text{Kubikzahlen sind!}$$

Aufgabe 051032:

a) Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e+f$ und α! Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$, f die Länge der Diagonalen $\overline{BD}$ und α das Maß des Winkels $\sphericalangle DAB$.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 051033:

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, b und c für die $a + bc = (a + b)(a + c)$ gilt!

Aufgabe 051034:

Beweisen Sie, das $\log_2 6$ keine rationale Zahl ist!

Aufgabe 051035:

Man gebe für die reellen Zahlen a, b, c, d Bedingungen an, die folgendes leisten:

1. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Gleichung

$$\frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d} = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (1)$$

   (mindestens) eine Lösung.

2. Wenn die Gleichung (1) eine Lösung hat, so sind die Bedingungen erfüllt.

Man ermittle, falls die Bedingungen erfüllt sind, alle Lösungen von (*). (Diskussion)

Aufgabe 051036:

Gegeben seien zwei konzentrische Kreise.

Man beweise, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen jedes Punktes P auf der äußeren Kreislinie von den Endpunkten eines Durchmessers des inneren Kreises konstant ist.

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051031:

Es ist

$$\begin{aligned} 1331 &= 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = (10+1)^3 \\ 1030301 &= 1 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = (10^2+1)^3 \\ 1003003001 &= 1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 = (103+1)^3 \end{aligned}$$

Folgen bei einer Zahl in der angegebenen Weise jeweils k Nullen direkt aufeinander, so erhält man

$$1 \cdot 10^{3(k+1)} + 3 \cdot 10^{2(k+1)} + 3 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1}+1)^3$$

Also ist die angegebene Zahl eine Kubikzahl.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051032:

1) Man konstruiere zwei Strahlen, die von A ausgehen und den Winkel α einschließen.
2) Auf dem ersten Strahl markiere man einen beliebigen, von A verschiedenen Punkt B'.
3) Der Schnittpunkt des zweiten Strahls mit dem Kreis um A durch B' heiße D'.
4) Der Schnittpunkt der Parallelen zu AB' durch D' mit der Parallelen zu AD' durch B' heiße C'.
5) Die Länge der Strecke $B'D'$ wird auf dem Strahl AC' an C' in die Richtung angetragen, in der A nicht liegt. Der entstehende zweite Endpunkt dieser Strecke sei S'.
6) Auf dem Strahl AC' wird zusätzlich noch der Punkt S markiert, sodass die Strecke AS die Länge $e+f$ habe.
7) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' im Punkt B; die Parallele zu $D'S'$ durch S die Gerade AD' in D; und die Parallelen zu AB durch D sowie zu AD durch B sich in C.

Dann ist $ABCD$ der gesuchte Rhombus.

Beweis:

Zuerst ist nach Konstruktion $AB'C'D'$ ein Parallelogramm (siehe Schritt 4)), wobei zwei benachbarte Seiten gleichlang sind (siehe Schritt 3)); also ein Rhombus.

Weiterhin hat es bei A den Innenwinkel α, ist also ähnlich dem gesuchten Viereck. Also gibt es eine positive rationale Zahl k, sodass das gesuchte Viereck durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum A aus dem

Rhombus $AB'C'D'$ hervorgeht.

Dies gilt insbesondere auch für die Diagonalen und deren Summe, sodass sich der Streckungsfaktor k ergibt als

$$\frac{e+f}{|AC'|+|B'D'|} = \frac{|AS|}{|AS'|}.$$

Nach den Strahlensätzen ist dann aber auch

$$k = \frac{|AB|}{|AB'|} \quad \text{sowie} \quad k = \frac{|AD|}{|AD'|}$$

Abschließend wird C wieder als vierter Parallelogrammpunkt konstruiert, sodass das so konstruierte Viereck $ABCD$ wieder ein Rhombus mit Innenwinkel α ist, dessen Diagonalensumme aber nun die gewünschte Größe hat.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 051033:

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit jeder der folgenden Gleichungen

$$a + bc = a^2 + ac + ab + bc \qquad ; \qquad a(a+b+c-1) = 0 \tag{1}$$

Da das Produkt zweier Zahlen dann und nur dann Null ist, wenn wenigstens einer seiner Faktoren Null ist, folgt, dass

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad a+b+c-1 = 0$$

sein muss, und umgekehrt ist in jedem dieser Fälle die Gleichung (1) und damit die gegebene Gleichung erfüllt. Die vorgegebene Gleichung ist also erfüllt für alle Zahlentripel (a,b,c) mit

1. $a = 0$ und reellen Zahlen b und c und
2. reellen Zahlen a, b und c, für die $a+b+c=1$ gilt.

In allen anderen Fällen ist sie nicht erfüllt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051034:

Angenommen, $\log_2 6$ wäre eine rationale Zahl. Dann gibt es zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q > 0$, so dass

$$\log_2 6 = \frac{p}{q}$$

gilt. Hieraus folgt nach der Definition des Logarithmus $2^{\frac{p}{q}} = 6$. Diese Aussage ist äquivalent zu

$$2^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$$

Also müsste $2^{p-q} = 3^q$ gelten. Es sei $p - q = n$. Dann ist n ganz, und es müsste $2^n = 3^q$ gelten, woraus wegen $q > 0$ folgt, dass $n > 0$ sein muss. Daraus ergäbe sich $2|3^q$, was nicht wahr ist.

Also ist $\log_2 6$ keine rationale Zahl.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051035:

Wenn die Gleichung (1) eine Lösung x_0 besitzt, so gilt:

$$fraca(x_0+1)+bc(x_0+1)+d=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$$
$$c(x_0+1)+d\neq 0;\quad cx_0+d\neq 0$$

Daraus folgt

$$(a(x_0+1)+b)(cx_0+d)=(c(x_0+1)+d)(ax_0+b) \tag{2}$$

$c^2+d^2>0$, weil c und d nicht gleichzeitig Null sein können. Und weiter

$$ad=bc \qquad ; \qquad c^2+d^2>0 \tag{3}$$

Wenn (1) eine Lösung besitzt, so muss (3) gelten, und umgekehrt, wenn (3) gilt, dann hat (1) eine Lösung; denn aus (3) folgt, dass für alle reellen Zahlen x_0 sicher (2) gilt, und daraus folgt weiter:

I. Ist $c=0$, dann ist wegen (3) auch $a=0$ und $d\neq 0$. Also ist für jede reelle Zahl x_0 sicher (1) erfüllt.

II. Ist $c\neq 0$, dann ist die Gleichung (1) für jede reelle Zahl x_04 mit $x_0\neq -\frac{d}{c}$ und $x_0\neq -\frac{d+c}{c}$ erfüllt. $x_0=-\frac{d}{c}$ und $x_0=-\frac{d+c}{c}$ sind nicht Lösung von (1).

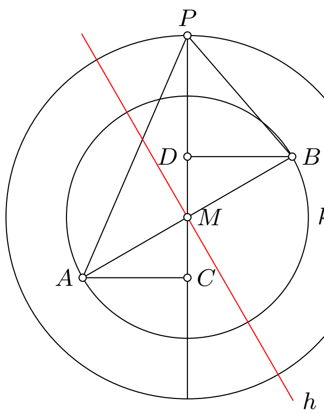
Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051036:

Es seien M der Mittelpunkt der gegebenen konzentrischen Kreise k_1 und k_2 und A und B die Endpunkte eines Durchmessers des inneren Kreises k_2.

Behauptung:

$|PA|^2+|PB|^2=c$, wobei c nicht von $P\in k_1$ abhängt.



Beweis:

Es seien C und D die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf g_{MP} und h die Senkrechte zu g_{AB} durch M (siehe Abbildung). Liegt P nicht auf h und nicht auf g_{AB}, so fallen C und D nicht mit A, B oder M zusammen, und es gilt für die Dreiecke ACM und BDM

$$|AM>=|BM| \quad \text{(als Radien des inneren Kreises)}$$
$$|\sphericalangle ACM|=|\sphericalangle BDM| \quad \text{(als rechte Winkel)}$$
$$|\sphericalangle AMC|=|\sphericalangle BMD| \quad \text{(als Scheitelwinkel)}$$

Folglich sind die Dreiecke ACM und BDM kongruent nach dem Kongruenzsatz (wsw), und es gilt $|CM| = |DM|$ und $|AC| = |BD|$.

O.B.d.A. kann angenommen werden, dass P auf derselben Seite von h wie B liegt. Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf ΔACP

$$|AP|^2 = |AC|^2 + (|CM| + |MP|)^2$$

sowie, angewandt auf ΔBPD,

$$|BP|^2 = |BD|^2 + (|MP| - |DM|)^2$$

Wegen $|BD| = |AC|$ und $|DM| = |CM|$ folgt daraus

$$|BP|^2 = |AC|^2 + (|MP| - |CM|)^2$$

Also ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AC|^2 + |CM|^2 + 2|CM| \cdot |MP| + |MP|^2 + |AC|^2 + |MP|^2 - 2|CM| \cdot |MP| + |CM|^2 =$$

$$= 2\left(|AC|^2 + |CM|^2 + |MP|^2\right)$$

Weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf ΔACM

$$|AM|^2 = |AC|^2 + |CM|^2$$

und somit ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

da $|AM|$ und $|MP|$ die Radien der konzentrischen Kreise sind.
Liegt P auf g_{AB} und zwar o.B.d.A. auf der Verlängerung von AB über B hinaus, erhält man

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |BM|)^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |AM|)^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

Liegt P auf h, so erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf ΔAMP und ΔMBP

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AM|^2 + |MP|^2 + |MP|^2 + |BM|^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972