5. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

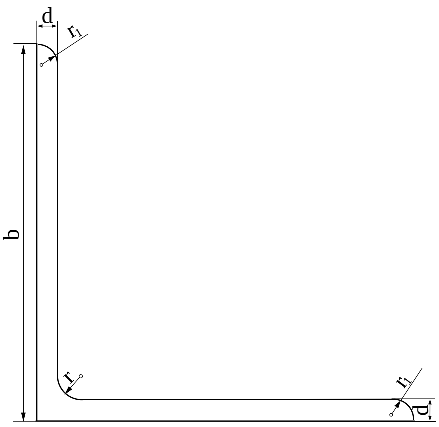
Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051211:

Ein Winkelstahl (gleichschenkliger L-Stahl) hat den in der Abb. angegebenen Querschnitt. Dabei ist $b = 50\,\text{mm}$, $d = 5\,\text{mm}$, $r = 2r_1 = 7\,\text{mm}$.



a) Wie groß ist seine Masse bei einer Länge von $5\,\text{m}$? (Dichte des Stahls $\rho = 7{,}85 \frac{g}{cm^3}$)?

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die Rundungen vernachlässigt und annimmt, daß die Querschnittsfläche aus zwei rechteckigen Flächen besteht?

c) Wie groß ist der maximale prozentuale Fehler, der bei der zu b) durchgeführten Näherungsrechnung entsteht, wenn $b = 50\,\text{mm}$ und $r = 7\,\text{mm}$ konstant sind und d zwischen $5\,\text{mm}$ und $9\,\text{mm}$ liegt?

Aufgabe 051212:

Vier kongruente Kugeln berühren eine Ebene auf ein und derselben Seite. Ferner berührt jede Kugel zwei der anderen, und jede der Kugeln berührt einen und denselben geraden Kreiskegel, dessen Grundkreis in der gegebenen Ebene liegt.

Es ist der Radius des Grundkreises des Kegels in Abhängigkeit vom Radius der Kugeln und von der Höhe des Kegels darzustellen (Fallunterscheidung).

Aufgabe 051213:

Jemand benutzt, um die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 7 zu untersuchen, die folgende "Siebenerregel":

Von der (mindestens zweistelligen) zu untersuchenden Zahl z wird die letzte Ziffer gestrichen. Von der erhaltenen Zahl wird sodann das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene Zahl z_1 ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist. Indem er das Verfahren gegebenenfalls wiederholt anwendet, kann er so von jeder natürlichen Zahl z feststellen, ob sie durch 7 teilbar ist.

Man untersuche, ob diese "Siebenerregel" richtig ist.

Aufgabe 051214:

Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:

Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so daß an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, daß die Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?

b) In wieviel Fällen r erhält man einen einzigen Ring?

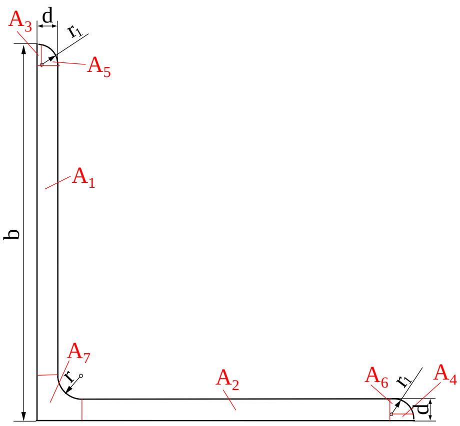
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, daß ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051211:



a) Für die Masse des Körpers benötigt man zuerst das Volumen und dafür den Flächeninhalt vom Querschnitt (da die Länge 5 m bekannt ist). Die Querschnittsfläche setzt sich wie in der Zeichnung ersichtlich aus den Flächeninhalten A_1 bis A_7 zusammen, wobei $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$ und $A_5 = A_6$ gilt. Die Teilflächen ergeben sich wie folgt: $A_1 = d \cdot (b - r - r_1 - d) = d \cdot (b - 3r_1 - d) = bd - 3r_1 d - d^2$, $A_2 = (d - r_1) \cdot r_1 = r_1 d - r_1^2$, $A_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2$, $A_7 = (d + r)^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2$

$A = 2 \cdot (bd - 3r_1 d - d^2) + 2 \cdot (r_1 d - r_1^2) + 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2) + d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2 = 2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 = 480,258\text{mm}^2 = 4,80258\text{cm}^2$
$\Rightarrow m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 4,80258\text{cm}^2 \cdot 500\text{cm} = 18850\text{g} = 18,85\text{kg}$

b) Den prozentualen Fehler erhält man, indem man den vereinfachten Wert durch den genauen Wert dividiert, 100% multipliziert und die Differenz zu 100% bildet. Da Länge und Dichte gleich sind und die sich kürzen würden, reicht es aus, mit den Flächeninhalten zu rechnen: Der vereinfachte Flächeninhalt ergibt sich als $A^* = bd + (b - d)d = 2bd - d^2$. Daraus folgt der Fehler: $\Delta = (1 - \frac{2bd - d^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = (\frac{2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = 1,09\%$

c) In der unter b) gefundenen Formel bleibt der Zähler unabhängig von d. Es muß also lediglich der Nenner untersucht werden. Da b viel größer als d ist, wird der Term $2bd - d^2$ mit größer werdendem d auch größer. Damit wird der Nenner größer und bei konstantem Zähler wird der Bruch kleiner. Der prozentuale Fehler wird also ebenfalls kleiner. Für Werte von d aus dem Bereich 5 bis 9 mm ist der prozentuale Fehler also bei d=5 mm am größten mit einem Wert von 1,09%.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura

Lösung 051212:

Mit den Bezeichnungen im Bild und $x = \overline{X_1 M}$, $h = \overline{MS}$, $y = \overline{AY}$, $z_1 = \overline{M_1 A}$, $z_2 = \overline{AB}$ und dem Radius r der Kugeln müssen folgende Beziehungen gelten:

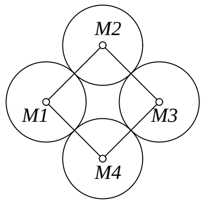


Abb. 051311a

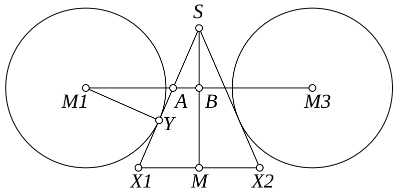


Abb. 051311b

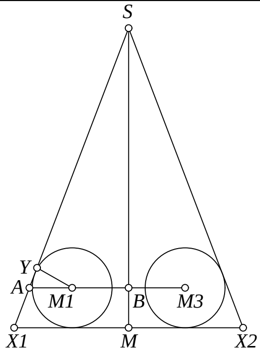


Abb. 051311c

(1) $\overline{M_1M_3} = 2 \cdot \sqrt{2}r$ (die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Quadrat wie in Abbildung a) dargestellt, wenn sie sämtliche denselben Kegel berühren)

(2) $\frac{x}{h} = \frac{y}{r} \Rightarrow rx = hy$ (ähnliche Dreiecke $\triangle X_1MS$ und $\triangle AYM_1$)

(3) $y = \sqrt{z_1^2 - r^2}$ (Satz des Pythagoras)

(4) $z_1 + z_2 = \frac{\overline{M_1M_3}}{2} = \sqrt{2}r$ für Bild b) bzw. $z_2 - z_1 = \frac{\overline{M_1M_3}}{2} = \sqrt{2}r$ für Bild c) $\Rightarrow z_1 = \pm(\sqrt{2}r - z_2)$, wobei + im Fall b) und − im Fall c) gilt. Dann gilt aber in beiden Fällen: $z_1^2 = 2r^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot z_2$

(5) $\frac{z_2}{x} = \frac{h-r}{h} \Rightarrow z_2 = \frac{h-r}{h} \cdot x$ (Strahlensatz)

Nun werden die Gleichungen (1) bis (4) ineinander eingesetzt:

$$\begin{aligned}
rx &= h \cdot \sqrt{z_1^2 - r^2} \\
rx &= h \cdot \sqrt{2r^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot z_2 - r^2} \\
rx &= \sqrt{h^2r^2 + h^2z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h^2 \cdot z_2} \\
rx &= \sqrt{h^2r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x} \\
r^2x^2 &= h^2r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= h^2r^2 + (h^2 - 2hr) \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= x^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{r \cdot (h-r)}{h-2r} \cdot x + \frac{hr^2}{h-2r} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \sqrt{\frac{2r^2 \cdot (h-r)^2}{(h-2r)^2} - \frac{hr^2}{h-2r}} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \frac{r}{h-2r} \cdot \sqrt{2 \cdot (h-r)^2 - h \cdot (h-2r)} \\
x_{1,2} &= \frac{r}{h-2r} \cdot \left(\sqrt{2}(h-r) \pm \sqrt{h^2 + 2r^2 - 2hr}\right)
\end{aligned}$$

Der Fall mit dem Plus vor der Wurzel stellt die Lösung für den Fall des Berührens der Kugeln von außen und das Minus für innen dar.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 051213:

Nach der gegebenen Regel gilt, wenn a die letzte Ziffer von z bedeutet,

$$z - a = 10(z_1 + 2a),$$

also

$$z = 10z_1 + 21a.$$

Daher ist z genau dann durch 7 teilbar, wenn $10z_1$ es ist. Läßt nun z_1 den Rest r bei der Teilung durch 7, wobei $0 \leq r \leq 6$ gilt, so läßt z denselben Rest wie $10r$, und dieser Rest ist dann und nur dann Null, wenn $r = 0$ ist ($10p$ ist auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung genau dann durch 7 teilbar, wenn p durch 7 teilbar ist).

Die "Siebenerregel" ist also richtig. Ob sie allerdings schneller zum Ziel führt als die übliche Division durch 7, die bei Nichtteilbarkeit auch den Rest liefert, hängt von der Übung im Umgang mit der Regel ab.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 051214:

a) Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabenstellung verbunden, z.B. o.B.d.A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten dur Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also $n = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

b) Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.

   Nehmen wir an, daß 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich daß 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach $r = 4 \cdot 2 = 8$.

c) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{r}{n} = \frac{8}{15} = 0,533...$$

   Dieter hat also die größeren Gewinnchancen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag