5. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051221:

Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.

a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhaltes der Kugel ist?

b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?

Aufgabe 051222:

Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.

Aufgabe 051223:

Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.

(2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}.$$

a) Es ist zu beweisen, daß die Funktion f periodisch ist, d. h., daß es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so daß $f(x) = f(x + kb)$ für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.

b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat!

Aufgabe 051224:

Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y \text{ erfüllt ist.}$$

Aufgabe 051225:

Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und

b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall $1 \leq x \leq 4$ beschränkt wird (Wie groß ist dieser?).

Aufgabe 051226:

Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051221:
Mit den Standardbezeichnungen r für Radius, h für Höhe und A für Flächeninhalt bzw. V für Volumen wird:

a) $\frac{1}{3}A_{Kugel} = A_{Kappe} \rightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot h_{Kappe} = 2\pi \cdot r \cdot (r-h)$

Daraus ergibt sich wegen $r \neq 0$: $r - h = \frac{2}{3}r$ also $h = \frac{1}{3}r$

b) $\frac{1}{3}V_{Kugel} = V_{Sektor} \rightarrow \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (r-h) = \frac{4}{9}\pi \cdot r^3$

$h = \frac{1}{3}r$

Aufgeschrieben und gelöst von Caban

Lösung 05122:
Fallunterscheidung:

1. $n = 3k$, $k \geq 0$
   mod 61: $5^n - 4^n \equiv 125^k - 64^k \equiv 3^k - 3^k \equiv 0 \pmod{61}$, also durch 61 teilbar.
2. $n = 3k+1$, $k \geq 0$
   mod 61: $5^n - 4^n \equiv 5 \cdot 125^k - 4 \cdot 64^k \equiv 5 \cdot 3^k - 4 \cdot 3^k \equiv 3^k \neq 0 \pmod{61}$, da ggT(3,61) = 1
3. $n = 3k+2$, $k \geq 0$
   mod 61: $5^n - 4^n \equiv 25 \cdot 125^k - 16 \cdot 64^k \equiv 25 \cdot 3^k - 16 \cdot 3^k \equiv 9 \cdot 3^k \equiv 3^{k+2} \neq 0 \pmod{61}$, da ggT(3,61) = 1

$5^n - 4^n$ ist genau dann durch 61 teilbar, wenn $n \geq 0$ durch 3 teilbar ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Matthias Lösche

Lösung 051223:

a) Sei y beliebig und $x = y + a$. Dann ist

$$f(y+2a) = f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+f(y+b)}{1-f(y+b)} = \frac{1+\frac{1+f(y)}{1-f(y)}}{1-\frac{1+f(y)}{1-f(y)}} = ... = -\frac{1}{f(y)}$$

("..." steht für eine einfache algebraische Umformung.)

Sei nun z beliebig und $y = z + 2a$. Dann ist

$$f(z+4a) = f(y+2a) = -\frac{1}{f(y)} = -\frac{1}{f(z+2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(z)}} = f(z)$$

Folglich ist die Funktion 4a-periodisch.

b) $f(x) = \tan(x)$ mit $a = \pi/4$ erfüllt beide Bedingungen, wobei aus dem Definitionsbereich des Tangens zusätzlich $\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ entfernt werden muss.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEnt

2. Möglichkeit:

Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ f(x) &= -3 \quad \text{für} \quad 1 \leq x < 2 \\ f(x) &= -1/2 \quad \text{für} \quad 2 \leq x < 3 \\ f(x) &= 1/3 \quad \text{für} \quad 3 \leq x < 4. \end{aligned}$$

Setze diese Funktion 4-periodisch auf R fort. Für $a = 1$ ist die Funktionalgleichung erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von Kornkreis

Lösung 051224:
Es gelten folgende trigonometrische Beziehungen:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \tag{1}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3}$$

Damit gilt für die gegebene Gleichung mit (1) und (2):

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$
$$2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x+y}{2} = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \tag{4}$$

Fall 1: $\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = k\pi \Rightarrow x+y = 2k\pi, k \in Z$

Fall 2: $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0$ in (4) und mit (3):

$$\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2} = 0$$
$$-2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{y}{2} = 0 \tag{5}$$

Dieses Produkt ist dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:

Fall 2a: $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in Z$

Fall 2b: $\sin\frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 2k\pi, k \in Z$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 051225:

Verschiebt man die Funktion um zwei Einheiten nach links ergibt sich:

$$f(x) = (x + 1,5) \cdot (x + 0,5) \cdot (x - 0,5) \cdot (x - 1,5) = (x^2 - 2,25) \cdot (x^2 - 0,25)$$

Man setze $f(x) = k$. Dadurch ergibt sich:

$$x^4 - 2,5x^2 + 0,5625 - k = 0$$

Bei lokalen Extremas müssen sich Mehrfachlösungen ergeben.

$$(x^2 - 1,25)^2 = 1 + k$$

Fall 1: $(x^2 - 1,25)^2 = 0$: $k = -1$ Minimum Mehrfachlösung,

Fall 2: $x^2 = 0$: $k = 0,5625$ Maximum

Im Intervall $[1,4]$ gibt es vier Nullstellen, also 3 Intervalle an denen lokale Extremas liegen können. Es kann aus Symmetriegründen nur noch einmal das Maximum 0,5625 auftreten oder keins. Größere Werte kann es also im Bereich $[1,4]$ nicht geben, da es nur drei lokale Extrempunkte geben kann.

Aufgeschrieben und gelöst von Caban

Lösung 051226:

Es ist möglich.

Wähle die Mittelpunkte zweier gegenüberliegende Kanten. Sei g die Gerade durch diese beiden Punkte. Die beiden Kanten und die Gerade g sind paarweise orthogonal zueinander.

Eine Parallelprojektion in Richtung g bildet die beiden Kanten auf ein symmetrisches Kreuz ab, welche die Diagonalen eines Quadrats bilden. Die übrigen vier Kanten werden auf die Seiten des Quadrats abgebildet.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314