5. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

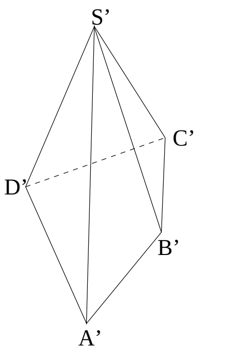
Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051231:
Es ist zu beweisen, daß die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

Aufgabe 051232:



Die in der Abb. im Grundriß gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, daß die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.

a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriß die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!

b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?

c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist?

Aufgabe 051233:

a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.

b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.

Aufgabe 051234:
Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 1,$$
$$y_0 = 0,$$
$$x_{n+1} = x_n + 2y_n,$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

für $n \geq 0$.

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n \text{ gilt.}$$

Aufgabe 051235:

Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks $ABCD$ sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d.

Man beweise, daß stets gilt

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2},$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 051236:

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

(1) $\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ für alle reellen x mit $\sin x \neq 0$.

(2) $\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = 0$ für alle reellen x mit $\sin x = 0$.

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051231:

$2^0 + 1 = 2$ ist nicht Kubikzahl. Für $n \geq 1$ ist die Zahl $2^n + 1$ ungerade.

Angenommen, $2^n + 1$ wäre Kubikzahl, so ist sie die dritte Potenz einer ungeraden Zahl, die sich in der Form $2k + 1$ darstellen lässt, wobei k eine natürliche Zahl ist. Es gilt also

$$2^n + 1 = (2k + 1)^3 \tag{1}$$

Da die Zahl $2^n + 1$ für $n = 1$ nicht Kubikzahl ist, muss man in (1) $n > 1$ und $k > 0$ annehmen. Nun folgt aus (1)

$$2^n + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \Rightarrow 2^n = 2k(4k^2 + 6k + 3)$$
$$2^{n-1} = k(4k^2 + 6k + 3)$$

Der zweite Faktor der rechten Seite ist eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist. Diese Zahl müsste, da k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, Teiler von 2^{n-1} sein. Das ist aber wegen der Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit jeder natürlichen Zahl ≥ 2 in Primfaktoren nicht möglich.

Wir erhalten einen Widerspruch, also ist keine der Zahlen z der Form $2^n + 1$ Kubikzahl.

Aufgeschrieben von Steffen Polster - Quelle (2)

2. Lösungsweg:

Gäbe es ein solches z, dass Kubikzahl wäre, so also auch eine natürliche Zahl k mit $2^n + 1 = k^3$ bzw. $2^n = k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1)$.

Insbesondere wären sowohl $k - 1$ als auch $k^2 + k + 1$ Teiler einer Zweierpotenz und damit selbst Zweierpotenzen.

Wegen $k - 1 < k^2 + k + 1$ müsste $k - 1 | k^2 + k + 1$ folgen, was aber wegen $k^2 + k + 1 - (k - 1)(k + 2) = k^2 + k + 1 - (k^2 + k - 2) = 3$ auf $k = 1$ oder $k = 3$ führt. Jedoch sind weder $1^3 - 1 = 0$ noch $3^3 - 1 = 26$ Zweierpotenzen, sodass es keine solche Zahlen gibt.

Aufgabe gelöst von cyrix

3. Lösungweg:

Dies folgt einfach daraus, dass im Falle einer Gleichheit $2^n + 1 = k^3 \quad (k, n \in \mathbb{N})$ bei einer Division durch 7 die linke Seite dieser Gleichung einen Rest in $\{2, 3, 5\}$, die rechte aber einen Rest in $\{0, 1, 6\}$ ergeben würde, Widerspruch!

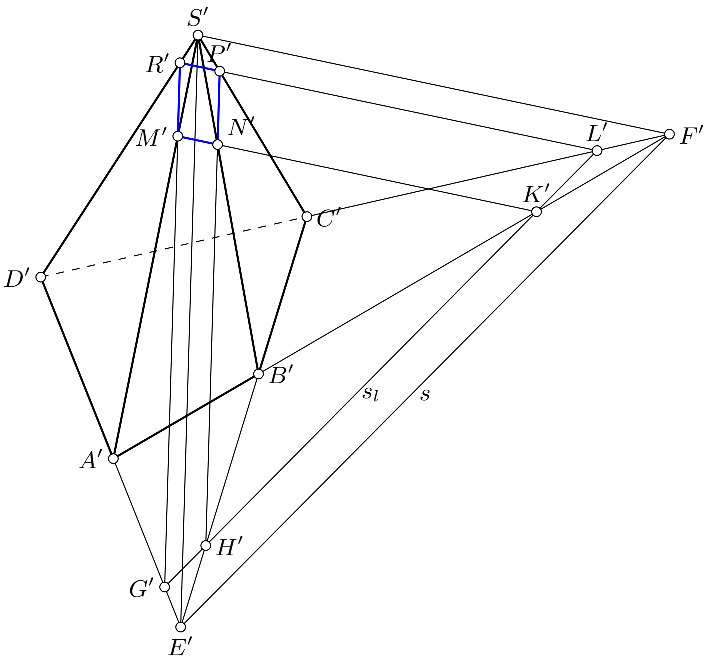
Aufgeschrieben und gelöst von weird

Lösung 051232:

a) Die Verlängerungen von DA und CB schneiden sich im Punkt E. Die Verlängerungen vin DC und AB schneiden sich im Punkt F. Die Spur der Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ sei s.

Jede Ebene, die parallel zur Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ verläuft und deren Spur s_l zwischen B (einschließlich B) und s liegt, schneidet aus der Pyramide ein Parallelogramm aus.

Die Seiten des Parallelogramms $MNPR$ sind paarweise parallel zu ES bzw. zu FS. LR und KM sind parallel zu FS; GR und HP sind parallel zu ES.



Der Konstruktion liegt folgender Satz zugrunde:

Wenn eine Ebene ϵ parallel zur Schnittgeraden zweier vorgegebener Ebenen verläuft und diese beiden Ebenen schneidet, so schneidet ϵ die vorgegebenen Ebenen in Geraden, die parallel zu s sind.

Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ADS$ und $\triangle BCS$ geht durch E uns S. Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ABS$ und $\triangle DCS$ geht durch F und S.

Da die Ebene mit der Spur s_l parallel zur Ebene ESF verläuft, sind GR und HP parallel zu ES, KM und LR parallel zu FS. Die Strecken GR, HP, KM und LR liegen in derselben Ebene und bestimmen somit das Parallelogramm $MNRP$.

b) Ist die Grundfläche ein Trapez, aber kein Parallelogramm, so liegt einer der Punkte E oder F im Unendlichen. Die Spuren s und s_l sind dann parallel zu den beiden parallelen Seiten des Trapezes. Zwei Seiten des gesuchten Parallelogramms sind dann ebenfalls parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes.

c) Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so schneidet jede zur Grundfläche parallele Ebene, die die Pyramide in mehr als einem Punkt trifft, diese in einem Parallelogramm.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051233:

Die Substitution $z := x - 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung dann erfüllt ist, wenn

$$af(z) + bf(-z) = c(z + 1) \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt.

Daher gilt auch

$$af(-z) + bf(z) = c(1 - z) \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit a und addiert das $-b$-fache von (2), erhält man

$$(a^2 - b^2)f(z) = ((a + b)z + a - b)c \tag{3}$$

Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $a^2 - b^2 \neq 0$ und es folgt

$$f(z) = c\left(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right)$$

Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung der Funktionalgleichung ist:

$$ac\left(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) + bc\left(\frac{-z}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) = c\left(\frac{z(a-b)}{a-b} + \frac{a+b}{a+b}\right) = c(z+1)$$

Falls $a = b$, so ist (3) äquivalent zu $0 = acz$. Einsetzen von $z = 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung nur dann eine Lösung haben kann, wenn $ac = 0$, also $a = 0 \vee c = 0$ ist.

Ist $a = 0$, so ist die Funktionalgleichung äquivalent zu $0 = cx$ ist. Einsetzen von $x = 1$ zeigt, dass $c = 0$ gelten muss.

Ist $a \neq 0$, aber $c = 0$, so ist (1) äquivalent zu $f(y) + f(-y) = 0$. In diesem Fall ist also jede ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Funktionalgleichung.

Falls $a = -b$ und $a \neq b$ (insbesondere also $a \neq 0$), dann zeigt (3), dass $0 = c$ gelten muss.

Damit ist (1) äquivalent zu $f(z) - f(-z) = 0$, was genau dann erfüllt ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.

Zusammenfassend gilt also:

Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $f(x) = c\left(\frac{x}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right)$ die einzige Lösung der Funktionalgleichung.

Falls $|a| = |b|$ und $c \neq 0$, dann hat die Funktionalgleichung keine Lösung.

Falls $a = b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine ungerade Funktion ist.

Falls $a = -b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine gerade Funktion ist.

Falls $a = b = c = 0$ ist, dann erfüllen alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 051234:

Für $n = 0$ gilt die Aussage offenbar. Gelte nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (x_n + 2y_n)^2 - 2(x_n + y_n)^2 = 2y_n^2 - x_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Mit Induktion folgt die Aussage also für alle n.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 051235:

Vorbemerkung:

Falls $ABCD$ konkav ist, so erhalten wir durch "ausklappen"der konkaven Ecke ein konvexes Viereck, für die

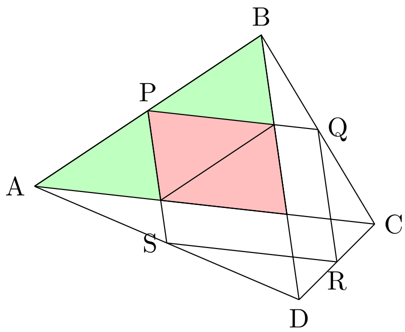
die Ungleichung ebenfalls gelten soll. Daher reicht es im folgenden nur ein konvexes Viereck zu betrachten. Gleichheit kann nur im nicht konkaven Fall auftreten.

Bestimmung des Flächeninhalts:

Seien P, Q, R, S die Seitenmittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, $e = |PR|, f = |QS|$ die Diagonalen des Vierecks $PQRS$.

Dann lässt sich über Strahlensätze $PQ||AC||RS$ und $QR||BD||SP$ zeigen, d.h. $PQRS$ ist ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}ef\sin(\epsilon)$, wobei ϵ den Winkel zwischen den Diagonalen bezeichnet.

Des Weiteren erhalten wir über Strahlensätze, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms genau halb so groß wie S ist, als $S = ef\sin(\epsilon)$ (Konvexität!). Insbesondere gilt $S = ef$ genau dann, wenn e und f orthogonal sind.



Die Ungleichung:

Als Vektoren betrachtet gilt: $\vec{PR} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$, insbesondere haben wir nach Anwendung der Dreiecksungleichung $e \leq \frac{a+c}{2}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn a und c parallel sind.

Alles zusammen:

$$S = ef\sin(\epsilon) \leq ef \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Nach den obigen Bemerkungen gilt $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ genau dann wenn die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks parallel und orthogonal zu den benachbarten Seiten sind, d.h. wenn $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 051236:

1) Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Daher reicht es im Induktionsschritt

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x} + \sin(2n+1)x = \frac{\sin^2 (n+1)x}{\sin x}$$

bzw.

$$\sin^2 nx + \sin(2n+1)x \cdot \sin x = \sin^2 (n+1)x$$

zu zeigen. Mit $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$ gilt:

$$\sin^2 (n+1)x - \sin^2 nx = \sin((2n+1)x) \cdot \sin x.$$

2) Aus $\sin x = 0$ folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere haben alle nx dieselbe Gestalt.

Daher sind alle Summanden auf der linken Seite der Gleichung 0.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972