5. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1965/1966

Aufgaben und Lösungen

5. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 051241:
Man ermittle alle reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die

$$(a+b)^n = a^n + b^n \text{ gilt.}$$

Aufgabe 051242:
An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren. Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.

Es ist zu beweisen, daß es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, daß an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren, und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat. (Es wird vorausgesetzt, daß der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.)

Aufgabe 051243:
Unter allen Strecken MN, die das Dreieck ΔABC in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

Aufgabe 051244:
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \quad (1)$$
$$x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \quad (2)$$
$$x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2 \quad (3)$$
$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2 \quad (4)$$

Aufgabe 051245:
Man beweise, daß $\tan 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ gilt

Aufgabe 051246:
Man beweise den folgenden Satz:

Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche).

5. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 051241:

Die gegebene Gleichung gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

I. 1) $a = 0$, b beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
   2) $b = 0$, a beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,

II. $a = -b$, n ungerade,

III. $n = 1$, a, b beliebig reell.

Beweis:

Dass die gegebene Gleichung in den genannten Fällen eine wahre Aussage wird, prüft man durch Einsetzen nach.

Jetzt wird gezeigt, dass die Gleichung in keinem anderen Fall erfüllt ist.

Angenommen, die gegebene Gleichung sei erfüllt und es liege keiner der angegebenen Fälle vor. Dann kann man aus Symmetriegründen o.B.d.A. annehmen, dass $|a| \geq |b|$, insbesondere also $a \neq 0$ ist.

Dividiert man beide Seiten der gegebenen Gleichung durch a^n, so erkennt man, dass

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

oder mit $x = \frac{b}{a}$

$$0 < |x| = \frac{|b|}{|a|} \leq 1 \qquad\qquad (1 + x)^n = 1 + x^n$$

gelten müsste. Ist nun $x > 0$, so gilt

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + ... + x^n > 1 + x^n$$

denn da nicht der Fall III vorliegt, ist $n \geq 2$. Ist aber $n < 0$ und n gerade, so ist $(1+x)^n < 1$ und $1+x^n > 1$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu (1).

Wir betrachten nun noch den letzten möglichen Fall $n = 2k + 1 \geq 3$ (k natürliche Zahl), $x = -t$, $0 < t < 1$. Dann ist

$$(1 + x)^n = (1 - t)^n < 1 - t < 1 - t^n = 1 + x^n$$

im Widerspruch zu (1).

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051242:

Anmerkung:

Bei beiden Lösungen wird davon ausgegangen, dass eine endliche Anzahl von Damen und Herren vorliegt. Für unendliche Mengen gilt die zu zeigende Aussage im Allgemeinen nicht.

Im Folgenden bezeichne "Aussage" die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass mindestens zwei Herren und zwei Damen anwesend waren, da sonst ein Herr mit allen Damen oder eine Dame mit allen Herren getanzt haben müsste.

Wir führen eine vollständige Induktion nach der Anzahl der Herren durch.

Für zwei Herren und beliebig viele (größer gleich 2) Damen ist die Aussage wahr.

Dazu schreiben wir die Tanzkonstellation in Matrixform und bezeichnen mit "+" und "-" dass ein Tanz stattgefunden bzw. nicht stattgefunden hat. Jede Spalte entspricht einem bestimmten Herren und jede Zeile einer bestimmten Dame, d.h. wir haben zwei Spalten und beliebig viele Zeilen. Falls die Aussage nicht wahr wäre, müsste die Konstellation die folgende Form haben

$$\begin{array}{cc} + & - \\ + & - \\ \multicolumn{2}{c}{\dots} \\ + & - \end{array}$$

was aber bedeuten würde, dass ein Herr mit allen Damen getanzt hat (in diesem Fall sogar beide Herren).

Sei nun die Anzahl der Herren $n > 2$ und die Aussage bereits für $n-1$ Herren bewiesen. Wir betrachten eine Tanzkonstellation, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Falls man aus den n Herren $n-1$ Herren auswählen kann, für die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind (d.h. jeder dieser $n-1$ Herren hat mit mindestens einer Dame getanzt und jede der Damen mit einem dieser Herren, und niemand dieser Herren hat mit allen Damen getanzt und keine der Damen mit allen dieser Herren), so zeigt die Induktionsvoraussetzung die Aussage.

Wir betrachten nun den Fall, dass so eine Auswahl nicht existiert. Dies bedeutet in der Matrixschreibweise, dass man keine $n-1$ Spalten auswählen kann, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, d.h. in der Tanzkonstellation der n Herren gibt es eine Zeile, in der genau ein "+" oder genau ein "-" steht, o.B.d.A. sei dies genau ein Plus ganz rechts in der letzten Spalte (d.h. von der Form $- - ... - -+$).

Nun muss aber in einer anderen Zeile ganz rechts ein Minus stehen (sonst hätte der entsprechende Herr mit allen Damen getanzt) und irgendwo anders in derselben Zeile ein Plus (sonst hätte die entsprechende Dame mit keinem Herren getanzt).

D.h. man hat z.B. das Schema

$$\begin{array}{c} - - \ \dots \ - - + \\ \dots \\ - + \ \dots \ + - - \end{array}$$

Die Damen, die diesen beiden Zeilen entsprechen und die Herren, die der ganz rechten Spalte und der Spalte mit dem Plus irgendwo anders (von der Zeile mit dem Minus ganz rechts) entsprechen, zeigen nun die Aussage.

Aufgabe wurde gelöst von Kornkreis

2. Lösung:

Sei d_1 eine Dame mit den meisten Tanzpartnern und h_1 ein Herr, mit dem d_1 nicht getanzt hat. d_2 sei eine Tanzpartnerin von h_1.

Dann gibt es einen Herrn h_2, mit dem d_1 aber nicht d_2 getanzt hat. (Denn sonst hätte d_2 mit allen Tanzpartnern von d_1 und zusätzlich mit h_1 getanzt, was der Maximalität von d_1 widerspricht.) d_1, d_2, h_1 und h_2 bilden ein Quartett, wie es laut Aufgabenstellung behauptet wird.

Aufgabe wurde gelöst von StrgAltEntf

3. Lösung:

Indiziere die Herren mithilfe einer Indexmenge I und bezeichne für jeden Herren $\alpha \in I$ die Menge der Damen, mit denen er getanzt hat, mit D_α.

Angenommen, die zu beweisende Aussage gilt nicht. Dann überlegt man sich, dass die Mengen D_α total geordnet bezüglich der Inklusion sein müssen, d.h. für beliebige $\alpha, \beta \in I$ muss $D_\alpha \subseteq D_\beta$ oder $D_\alpha \supseteq D_\beta$ gelten.

Betrachte nun $\cap_{\alpha \in I} D_\alpha$. Dies kann nicht die leere Menge sein, da jeder Herr mit mindestens einer Dame getanzt hat, und aufgrund der Totalordnungs-Eigenschaft der Mengen D_α (Edit: und unter der weiteren Annahme, dass beispielsweise I eine endliche Menge ist, da für unbeschränkte I der unendliche Schnitt durchaus leer sein kann).

Das bedeutet aber, dass es eine Dame gibt, die mit allen Herren getanzt hat, Widerspruch.

Aufgabe wurde gelöst von Kornkreis

4. Lösung:

Lösung: Laut Angabe hat jede Dame mindestens einen Tanzpartner(TP) und mindestens einen "Nichttanzpartner" (NTP). Gleiches gilt umgekehrt auch für die Herren. Bei Erfülltsein dieser beiden Bedingungen wollen wir eine Tanzrunde hier als "zulässig" bezeichnen. Des weiteren bezeichne ich im Folgenden einen Herrn als "redundant", wenn bei seiner Entfernung die verbleibende Tanzrunde noch immer zulässig ist.

Wir gehen nun die Herren einzeln durch und entfernen sie nacheinander aus der Tanzrunde, sofern sie redundant sind. Wegen der hier natürlich ebenfalls vorausgesetzten "Endlichkeit" der Tanzrunde muss man dabei irgendwann auf einen Herrn $H1$ stoßen, der nicht redundant ist, weil es eine Dame $D1$ gibt, welche ihn als einzigen TP oder NTP hat.

Sei nun $H1$ o.B.d.A. ein TP von dieser Dame $D1$. (Andernfalls müsste man im Folgenden einfach einen konsequenten Tausch TP $\leftrightarrow$ NTP vornehmen.) Ist dann $D2$ eine Dame, für welche $H1$ ein NTP ist, aber ein dann anderer Herr $H2$ ein TP, so ist Letzterer dann automatisch ein NTP von $D1$, da diese ja nur $H1$ als einzigen TP hat. Die Teilmenge $D1, D2, H1, H2$ der Tanzrunde ist daher ein Quartett mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgeschrieben und gelöst von weird

Lösung 051243:

Wir betrachten zunächst eine Strecke MN, deren Endpunkt M auf dem Strahl aus A durch B und deren Endpunkt N auf dem Strahl aus A durch C liegt und für die der Inhalt des Dreiecks AMN halb so groß ist, wie der Inhalt des Dreiecks ABC.

Die Strecke MN darf auch teilweise außerhalb des gegebenen Dreiecks verlaufen. Setzt man $AM = x$ und $AN = y$, so ist nach einer bekannten Inhaltsformel der Flächeninhalt des Dreiecks AMN genau dann halb so groß wie der des Dreiecks ABC, wenn

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

also

$$2xy = bc \qquad (1)$$

gilt.

Bedeutet $d_a = MN$, so ergibt sich nach dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle AMN$

$$\begin{aligned} d_a^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x-y)^2 + 2xy(1-\cos\alpha) \\ &= (x-y)^2 + bc(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) \quad \text{also}$$
$$1-\cos\alpha = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

Folglich ist

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}[a^2-(b-c)^2] = (x-y)^2 + 2(s-b)(s-c)$$

mit $2s = a+b+c$. Unter Verwendung der Dreiecksformel $I_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ergibt sich somit

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{2I^2}{s(s-a)} \tag{2}$$

Durch zyklische Vertauschung von (2) ergeben sich

$$d_b^2 = (x'-y')^2 + \frac{2I^2}{s(s-b)}; \quad d_c^2 = (x''-y'')^2 + \frac{2I^2}{s(s-c)} \tag{3}$$

wenn x', y', x'', y'' die entsprechenden Abschnitte bei einer Strecke bedeuten, deren Endpunkte auf den von B bzw. C ausgehenden Strahlen liegen und d_b bzw. d_c die Längen dieser Strecken sind.

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $a \leq b \leq c$ ist. Dann gilt

$$\frac{2I^2}{s(s-a)} \leq \frac{2I^2}{s(s-b)} \leq \frac{2I^2}{s(s-c)}$$

und das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ bzw. $b = c$ ist. Hieraus und aus (2) und (3) ergibt sich, dass jede der Längen d_a, d_b, d_c nicht kleiner als

$$\frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}}$$

ist. Um zu zeigen dass

$$d = \frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{2(s-b)(s-c)}$$

das gesuchte Minimum ist, genügt es zu zeigen, dass die für $x = y$ entstehende Strecke MN, deren Länge $d_a = d$ ist, nicht in das Äußere des Dreiecks eintritt.

Im Fall $x = y$ ergibt sich aus (1)

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

Da $a \leq b \leq c$ vorausgesetzt ist, gilt wegen der Dreiecksungleichung $c < a + b \leq 2b$ und daher

$$\sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leq c$$

so dass jeder der Punkte M und N auf einer der Dreiecksseiten liegt.

Ist $a < b$, so gibt es genau eine kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$.

Ist $a = b < c$, so gibt es genau zwei kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$ und $x' = y'$.

Ist $a = b = c$, so gibt es entsprechend drei kürzeste unter diesen Strecken, die für $x = y$, $x' = y'$ und $x'' = y''$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051244:
Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (1) und (2) durch Subtraktion

$$x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_4 - x_3 = 0 \qquad \text{also} \qquad (x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

Da das Gleichungssystem bei jeder zyklischen Vertauschung der Indizes in sich übergeht, ergeben sich weiter die folgenden Gleichungen:

$$(x_1 - x_2)(x_3 + x_4 - 1) = 0 \tag{5}$$
$$(x_1 - x_3)(x_2 + x_4 - 1) = 0 \tag{6}$$
$$(x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 1) = 0 \tag{7}$$
$$(x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - 1) = 0 \tag{8}$$
$$(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 1) = 0 \tag{9}$$
$$(x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \tag{10}$$

Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn in jeder der Gleichungen wenigstens ein Faktor gleich Null ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$
b) $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$
c) $x_1 = x_2 \neq x_3; x_1 \neq x_4$
d) $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zyklische Vertauschung des Indizes, da jedes Quadrupel, das aus einer Lösung durch zyklische Vertauschung der Indizes entsteht, ebenfalls Lösung ist und man jedes Quadrupel durch zyklische Vertauschung in einen der Fälle 1) bis 4) überführen kann.

a) In diesem Fall erhält man aus (1):

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_1^2 + \frac{x_1}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn

$$x_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad x_1 = \frac{-1-5}{6} = -1$$

ist. Man überzeugt sich leicht, dass für

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$$

das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

b) In diesem Fall erhält man wegen $x_3 \neq x_4$ aus (10):

$$x_1 + x_2 = 1 \quad ; \quad 2x_1 = 1 \quad ; \quad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$

Ferner folgt aus (1): $\quad 3x_1^2 + x_4 = 2 \quad ; \quad x_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Man überzeugt sich leicht, dass für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{5}{4}$ das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

c) In diesem Fall müsste wegen (6), (7), (8), (9)

$$x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = x_1 + x_4 = x_1 + x_3 = 1 \qquad \text{also} \qquad x_3 = x_4$$

und wegen der aus (1) folgenden Beziehung $x_3 = 1 - x_1$

$$x_1^2 + 2x_1(1 - x_1) + 1 - x_1 = 2 \quad ; \quad x_1^2 - x_1 + 1 = 0$$

gelten. Das ist aber auf Grund von

$$x_1^2 - x_1 + 1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

nicht möglich. In diesem Fall existiert also keine Lösung.

d) In diesem Fall folgt aus (5) und (6): $x_3 + x_4 = x_2 + x_4 = 1$, das ist aber wegen $x_1 \neq x_2$ unmöglich.

Das gegebene Gleichungssystem ist also für die folgenden Quadrupel

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); \quad (-1, -1, -1, -1); \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right); \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

und nur für diese erfüllt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 051245:

Zur Lösung werden die Sinus- und Kosinuswerte für $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ benutzt, welche sich als $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ schreiben lassen, wobei k beim Sinus die Werte von 0 bis 4 und beim Kosinus vom 4 bis 0 durchläuft.

Zudem kann man wieder

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \text{und} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

nutzen sowie die Additionstheoreme

$$\sin(x - y) = \sin x \cos x - \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Damit:

$$\tan(7°30') = \frac{\sin(7°30')}{\cos(7°30')} = \frac{2\sin(7°30')\sin(7°30')}{2\sin(7°30')\cos(7°30')} = \frac{1 - \cos(15°)}{\sin(15°)} = \frac{1 - \cos(45° - 30°)}{\sin(45° - 30°)}$$

Und somit:

$$\frac{1 - \cos(45° - 30°)}{\sin(45° - 30°)} = \frac{1 - \cos(45°)\cos(30°) - \sin(45°)\sin(30°)}{\sin(45°)\cos(30°) - \cos(45°)\sin(30°)} =$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-6-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$$

Aufgeschrieben und gelöst von einem Matheplanetarier

Lösung 051246:

Wähle einen Schnittkreis k einer Ebene mit der Fläche F (Schnittkreise existieren, weil F eine Fläche ist und somit mehr als einen Punkt enthält).

Nun betrachte die Ebenenschar E_t bestehend aus allen Ebenen e', die durch den Mittelpunkt von k gehen und senkrecht auf der Ebene von k stehen. Eine beliebige solche Ebene e' schneidet k in zwei (auf k gegenüberliegenden) Punkten.

Insbesondere schneidet e' also die Fläche F in zwei Punkten, sodass die Schnittfigur einen Kreis k' darstellt. Alle anderen Ebenen der Schar E_t schneiden nun k' in denselben zwei Punkten und sie schneiden k.

Man sieht leicht, dass die entsprechenden Schnittkreise alle denselben Mittelpunkt und Radius haben, sodass sie insgesamt eine Kugelfläche bilden.

Dies zeigt, dass eine Kugelfläche in F enthalten ist. Da die Ebenenschar E_t aber den ganzen Raum überdeckt und somit jeden möglichen Schnittpunkt mit der Fläche F enthalten muss, folgt, dass F in der Kugelfläche enthalten ist. Beides zusammen impliziert, dass F eine Kugelfläche ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Kornkreis

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972