6. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060731:

Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist.

Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$!

Aufgabe 060732:

In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe:

Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.

Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

Aufgabe 060733:

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:

(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.

(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$.

Aufgabe 060734:

Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ unkürzbar und keine ganzen Zahlen sind.

Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung an, wobei
im ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

Aufgabe 060735:

Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:

Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.

Beweise diesen Satz!

Aufgabe 060736:

In einem gleichschenkligen Dreieck ΔABC habe der Winkel $\sphericalangle ACB$ ein Gradmaß von $120°$.

Beweise, daß die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060731:

(1) Sind p, q natürliche Zahlen ≥ 1, wobei p durch q teilbar ist, so ist p das kgV von p, q.

(2) Bei gleichen Voraussetzungen ist q der ggT von p, q.

(3) Das kgV von a, b, c ist das kgV von a und dem kgV von b, c. Also ist es nach (1) das kgV von a und b. Nochmals nach (1) folgt, daß es a ist.

(4) Der ggT von a, b, c ist der ggT von c und dem ggT von a, b. Also ist er nach (2) der ggT von c und b. Nochmals nach (2) folgt, daß er c ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060732:

Der Hund braucht zu 4 Scnritten genau soviel Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Da 4 Hundeschritte so lang wie 6 Fuchsschritte sind, kommt der Hund mit je 4 Schritten dem Fuchs um 1 Fuchsschritt näher. Die 54 Fuchsschritte holt der Hund folglich mit $54 \cdot 4$ Hundeschritten = 216 Hundeschritten auf.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060733:

I. Angenommen, p sei eine gesuchte Parallele. Dann gibt es auf der Strecke DE einen Punkt P, so daß $\overline{BD} = \overline{DP}$ und $\overline{CE} = \overline{EP}$ gilt. Daraus folgt

$\sphericalangle ABP \simeq \sphericalangle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und

$\sphericalangle DPB \simeq \sphericalangle CBP$ (Wechsel-Kinkel an geschnittenen Parallelen),

also ist BP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$. Entsprechend folgt, daß CP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist. Daher kann eine Gerade p höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sei wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

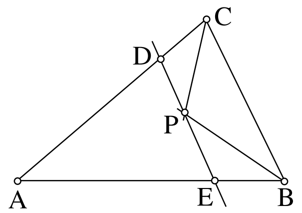
II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ACB$ und ziehe durch ihren Schnittpunkt P die Parallele p zu BC.

III. Ist eine Gerade p wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele. *Beweis:* Nach Konstruktion ist

$\sphericalangle DBP \simeq \sphericalangle CBP$ (da $\sphericalangle ABC$ durch BP halbiert wird) und

$\sphericalangle CBP \simeq \sphericalangle DPB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also ist ΔBPD gleichschenklig, und zwar ist $\overline{BD} = \overline{DP}$. Ebenso folgt $\overline{CE} = \overline{EP}$ und daher $\overline{BD}+\overline{CE} = \overline{DE}$. Außerdem liegt P im Innern des Dreiecks ΔABC, also schneidet p die Strecken AB und AC.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden, ihr Schnittpunkt P und die Parallele durch P zu BC existieren stets eindeutig. Nach III gibt es daher stets eine gesuchte Parallele p und nach I auch nur eine solche.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060734:

I. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ kann z.B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{15}$.

II. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n} = \frac{a(m+n)}{mn}$ kann z.B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$.

III. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$ kann (zugleich mit den Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15$, $a = 8$ erreicht werden: $\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

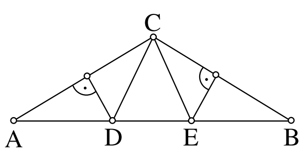
Lösung 060735:

Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a + b$ mit ganzen Zahlen a und b, für die $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$. Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man: $10a + b + a - b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar.□

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 060736:

Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ΔABC muß AB sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle ABC$ (Gradmaß 30°). Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC mit der Seite AB seien D bzw. E. Dann ist



(1) $\overline{AD} = \overline{CD}$ (da D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt), also $\sphericalangle ACD \simeq \sphericalangle BAC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD) (Gradmaß 30°). Daher hat der Winkel $\sphericalangle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck ΔACD). Ebenso zeigt man

(2) $\overline{BE} = \overline{CE}$ und $\sphericalangle CED = 60°$. Also ist ΔCDE gleichseitig, und es folgt

(3) $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{CE}$.

Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BE}$.□

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.