6. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1966/1967

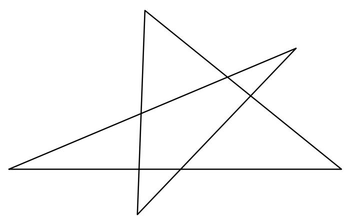
Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060911:

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abb. dargestellten fünfzackigen Sternes.



Aufgabe 060912:

Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die "letzte Quersumme" nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die "letzte Quersumme" 9 haben!

Aufgabe 060913:

In einem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, daß $\overline{BE} = \overline{AB}$ ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, daß der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter Winkel ist.

Das Viereck $ABCD$ hat

a) vier kongruente Winkel,

b) vier kongruente Seiten,

c) zwei Paare kongruenter Seiten,

d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,

e) zwei kongruente Winkel.

Aufgabe 060914:

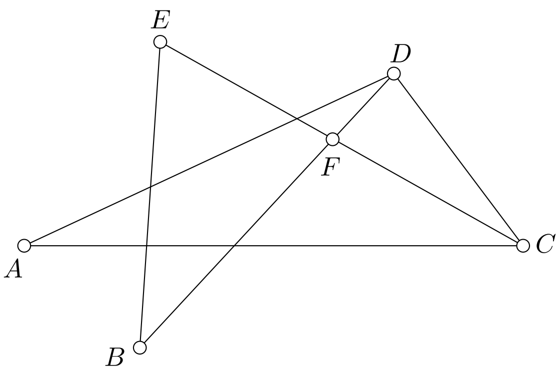
Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060911:



Es seien: $\alpha = \sphericalangle CAD$; $\beta = \sphericalangle EBD$; $\gamma = ACE$; $\delta = \sphericalangle BDA$; $\epsilon = \sphericalangle BEC$.

Im Dreieck ΔACD gilt dann nach Innenwinkelsummensatz:

$$180° = \alpha + \gamma + \sphericalangle ECD + \sphericalangle CDB + \delta$$

Unter Nutzung des Innenwinkelsummensatzes in Dreieck ΔCDF:

$$= \alpha + \gamma + \delta + (180° - \sphericalangle CFD)$$

Ferner gilt: $\sphericalangle BFE = \sphericalangle CFD$, weil sie zueinander Scheitelwinkel sind. Ferner gilt der Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔBFE:

$$\begin{aligned} &= \alpha + \gamma + \delta + 180° - \sphericalangle BFE \\ &= \alpha + \gamma + \delta + 180° - (180° - \beta - \epsilon) \\ &= \alpha + \gamma + \delta + \beta + \epsilon \end{aligned}$$

Dies ist die Summe aller 5 Innenwinkel der Spitzen des fünfzackigen Sternes und beträgt somit 180°.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060912:

Die erste Quersumme Q_n einer ein-, zwei- oder dreistelligen Zahl n kann maximal 27 sei, nämlich für eine Zahl ausschließlich bestehend aus der größten Ziffer 9 $\Rightarrow Q_{999} = 9 + 9 + 9 = 27$. Dies ist gleichzeitig die einizge Zahl, die diese Quersumme hat und ist eine der gesuchten Zahlen, da $Q_{27} = 9$.

Die nächstkleinere erste Quersumme, deren letzte Quersumme 9 ist, ist 18. Danach folgt nur noch die Quersumme 9, deren letzte Quersumme natürlich auch 9 ist. Wir müssen nun also noch alle Zahlen finden, deren Quersumme 9 oder 18 ist.

Im Bereich der ein- und zweistelligen Zahlen sind 9, 18, 27, ..., 81, 90 die einzigen Zahlen mit Quersumme 9 und 99 die einzige Zahle mit Quersumme 18. Dies sind in Summe 11 Zahlen.

Im Bereich 100 bis 199 kommen wir ebenfalls auf 11 solche Zahlen: 108, 117, 126, ..., 171, 180 mit Quersumme

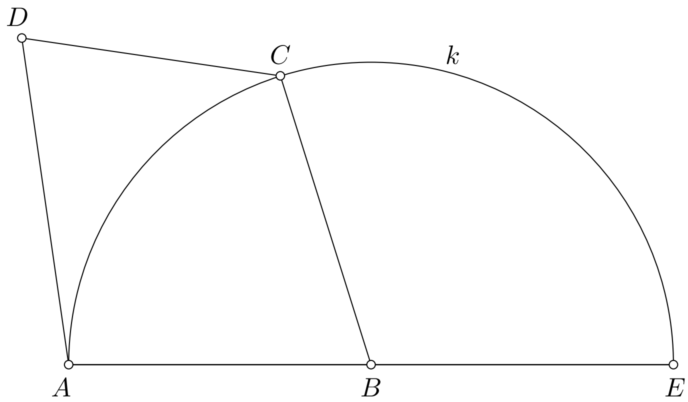
9 sowie 189 und 198 mit Quersumme 18.

Diese Bildungsvorschrift setzt sich in jedem Hunderterbereich mit 11 Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist, fort.

Damit ergeben sich $10 \cdot 11 + 1$ Zahlen, deren Quersumme 9, 18 oder 27 und damit deren letzte Quersumme 9 ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060913:



Aufgrund der Lage von A, B und E kann man feststellen, dass der Winkel $\sphericalangle ACE$ immer genau dann ein rechter Winkel ist, wenn sich C auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{AB}$ befindet. Die Lage von C ist daher definiert, aber nicht eindeutig. Gleichzeitig kann man sagen, dass die Lage von D unabhängig zu den anderen Verecksecken ist.

a) vier kongruente Winkel $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig

b) vier kongruente Seiten $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig

c) zwei Paare kongruenter Seiten $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig

d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt $\Rightarrow$ korrekt: gemeinsamer Punkt B und kongruente Seiten $\overline{AB} = \overline{BC}$ mit A und C auf dem Kreisbogen und B als Kreismittelpunkt

e) zwei kongruente Winkel $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060914:

Jeder Teilnehmer spielte genau 7 Partien und konnte maximal 7 Punkte erreichen (wenn er alle Partien gewann).

Die vier Schachspieler, die die letzten 4 Plätze belegten, mußten unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilten sie also unter sich auf.

Da der Spieler, der den zweiten Platz belegte, laut Aufgabe genau so viele Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erreicht haben; denn besiegte er außer den anderen Spielern auch den Ersten, würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung gleiche Punktzahl.

Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, d.h. sie haben alle Pertien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der vierte Spieler den sechten Spieler besiegt.

Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z.B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (2)

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972