# 6. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 9
# Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

# 6. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 9
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060931:

Zwei Primzahlen $p_1$ und $p_2$ (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.

Beweisen Sie, daß für alle Primzahlzwillinge $p_1$ und $p_2$, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 060932:

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Aufgabe 060933:

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

Aufgabe 060934:

Zeigen Sie, daß es unter allen Zahlen der Form $2p+1$, wobei $p$ eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Aufgabe 060935:

Auf dem Kreis $k$ bewegen sich der Punkt $A$ mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_1$ und der Punkt $B$ mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_2$, wobei $v_1 \neq v_2$ ist.

Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt $A$ den Punkt $B$ jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ (in m/min)?

Aufgabe 060936:

In einer Ebene sind ein Kreis $k$, eine Gerade $g$ sowie ein Punkt $A$ auf $g$ gegeben.

Man konstruiere einen Kreis $k'$, der erstens $k$ berührt und zweitens $g$ in $A$ berührt. Man untersuche, wie viele solcher Kreise $k'$ es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von $k$, $g$ und $A$ geben kann.

# 6. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 9
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060931:
Lösung für die Uni: Es ist zu zeigen, dass $p_1 + p_2 = 0 \mod 12$.

Dafür zeigen wir getrennt, dass $p_1 + p_2 = 0 \mod 3$ und $p_1 + p_2 = 0 \mod 4$. (Das reicht wegen der Teilerfremdheit von 3 und 4).

1. $0 \mod 3$:
   Es gilt $p_1, p_2 > 3$, also $p_1, p_2 \neq 0 \mod 3$. Das führt $p_2 = 1 \mod 3$ zum Widerspruch, denn dann wäre $p_1 = p_2 + 2 = 1 + 2 = 3 = 0 \mod 3$. Es muss also $p_2 = -1 \mod 3$ sein. Dann ist $p_1 = -1 + 2 = 1 \mod 3$, und damit $p_1 + p_2 = -1 + 1 = 0 \mod 3$.

2. $0 \mod 4$:
   Da $p_1, p_2 > 2$ gilt $p_1 = p_2 = 1 \mod 2$, und damit $p_1, p_2 = \pm 1 \mod 4$ (beachte, dass nicht unbedingt $p_1 = p_2 \mod 4$). Falls $p_2 = 1 \mod 4$, dann ist $p_1 = p_2 + 2 = 3 = -1 \mod 4$, und damit $p_1 + p_2 = 0 \mod 4$. Ist hingegen $p_2 = -1 \mod 4$, dann ist $p_1 = p_2 + 2 = 1 \mod 4$, und wieder $p_1 + p_2 = 0 \mod 4$.

Lösung für die Schule:
Wir zeigen, dass $p_1 + p_2$ sowohl durch 4, als auch durch 3 teilbar ist. Da 4 und 3 teilerfremd sind, muss dann nämlich $p_1 + p_2$ durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar sein.

1. Teilbarkeit durch 3:

   Da beide Primzahlen größer als drei sind, sind sie nicht durch 3 teilbar. Damit ist $p_2$ entweder von der Form $p_2 = 3k + 1$ oder $p_2 = 3k + 2$ mit einer natürlichen Zahl $k$.

   Da $p_1 - p_2 = 2$ ist $p_1 = p_2 + 2$. Also ist $p_1$ von der Form

   $$p_1 = p_2 + 2 = 3k + 1 + 2 = 3(k + 1) \qquad \text{oder} \qquad p_1 = p_2 + 2 = 3k + 2 + 2 = 3(k + 1) + 1$$

   Der erste Fall kann nicht sein, denn dann wäre $p_1$ durch 3 teilbar, und somit keine Primzahl.

   Im zweiten Fall ist aber $p_1 + p_2$ von der Form $p_1 + p_2 = 3(k + 1) + 1 + 3k + 2 = 2 \cdot 3(k + 1)$, ist also durch 3 teilbar.

2. Teilbarkeit durch 4:

   Da beide Primzahlen größer als 3 sind, sind sie nicht durch 2 teilbar. Damit ist $p_2$ von der Form $p_2 = 2k + 1$. Dann ist $p_1 = p_2 + 2 = 2k + 3$.

   Dann ist $p_1 + p_2 = 2k + 1 + 2k + 3 = 4k + 4 = 4(k + 1)$, also durch 4 teilbar.

Damit ist $p_1 + p_2$ durch 3 und durch 4 teilbar, und damit auch durch 12.

*Aufgeschrieben und gelöst von Vercassivelaunos*

*2. Lösung:*

Von den drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen $p_2$, $p_2+1=p_1-1=\frac{p_1+p_2}{2}$ und $p_1$ ist genau eine durch 3 teilbar.

Da es wegen $p_1>p_2>3$ die beiden Primzahlen nicht sind, ist es also $\frac{p_1+p_2}{2}$. Darüber hinaus ist diese Zahl als Nachfolger (und Vorgänger) einer ungeraden Zahl selbst gerade, also durch 6 teilbar.
Damit ist $p_1+p_2=2\cdot\frac{p_1+p_2}{2}$ durch 12 teilbar.

*Aufgeschrieben und gelöst von cyrix*

Lösung 060932:
Der Umfang sei $u$, die Seitenlängen seinen $a,b,c,d,e,f$, sodass

$$u=a+b+c=a+e+f=b+d+f=c+d+e$$

Addiere die ersten beiden Umfänge und ziehe die anderen beiden Umfänge ab, und wir erhalten:

$$0=u+u-u-u=a+b+c+a+e+f-b-d-f-c-d-e=2a-2d$$

also $a=d$. Analog erhält man $b=e$ und $c=f$. Also haben alle vier Dreiecke Seiten mit Längen $a$, $b$ und $c$. Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen sind bekanntlich kongruent.

*Aufgeschrieben und gelöst von philippw*

Lösung 060933:
Nach Normierung der Hypotenuse auf 1 ist die Ungleichung

$$1\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{1-x^2})$$

zu zeigen, wobei $x,y$ die Kathetenlängen bezeichnet ($x^2+y^2=1$). Aus $0\leq x\leq 1$ folgt $\sqrt{2}-x>0$ und $1-x^2\geq 0$. Somit gilt die folgende Äquivalenz.

$$1\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{1-x^2})\iff(\sqrt{2}-x)^2\geq 1-x^2\iff$$

$$\iff 0\geq -1+2\sqrt{2}x-2x^2=-2(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2\iff 0\leq(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

Die letzte Zeile ist für alle $x\in R$ wahr. $\square$

*Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314*

Lösung 060934:
Sei $2p+1=a^3$. Dann ist $a$ ungerade und es gilt

$$p=\frac{a^3-1}{2}=\frac{a-1}{2}(a^2+a+1)$$

Da $p$ prim, muss $\frac{a-1}{2}=1$ oder $a^2+a+1=1$ gelten.

Da $a^2+a+1>1$ folgt $a=3$ und somit $p=13$. In der Tat ist 13 prim und es gilt $2\cdot 13+1=3^3$.

*Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf*

Lösung 060935:

a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $v_1 > v_2$. Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von $B$ bezüglich $A$ durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also

$$\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24} m = 280 m$$

Das ist die Länge des Kreisumfangs.

b) Nach dem Gesagten ist

$$v_1 + v_2 = \frac{14m}{24s} = 35 \frac{m}{min}$$

Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von $B$ bezüglich $A$ durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit $v_2$ von $v_1$. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit

$$v_1 - v_2 = \frac{280m}{56min} = 5 \frac{m}{min}$$

Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also $v_1 = 20 \frac{m}{min}$ und $v_2 = 15 \frac{m}{min}$.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)*

Lösung 060936:

Wir geben zunächst eine Konstruktionsvorschrift für den Mittelpunkt $M$ von $k'$ an falls $A$ nicht auf $g$ liegt und untersuchen dann, wie viele Möglichkeiten es gibt.

Wir konstruieren zunächst die zu $g$ senkrechte Gerade $h$ durch den Mittelpunkt von $k$.

Wir verschieben nun $g$ entlang dieser Senkrechten um den Radius von $k$. Wir konstruieren nun die Ortslinie aller Punkte, die von der verschobenen Gerade und dem Mittelpunkt denselben Abstand haben. Dies ist eine Parabel, die symmetrisch bzgl. $h$ ist.

Damit $k'$ nicht nur $g$ berührt, sondern dies auch in $A$ tut, konstruieren wir die zu $g$ senkrechte Gerade $l$ durch $A$.

Weil $l$ zu $h$ parallel ist, hat diese genau einen Schnittpunkt mit der oben konstruierten Parabel. Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines gewünschten Kreises (denn der Abstand von $M$ zum Mittelpunkt von $k$ ist gleich dem Abstand von $M$ zu $A$ plus dem Radius des Kreises $k$).

Nun zum eigentlichen Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $g$ ist Passante von $k$. Dann kann $k'$ sowohl $g$ als auch $k$ nur dann berühren, wenn $k'$ in der selben Halbebene bzgl. $g$ liegt wie $k$.

   Der Mittelpunkt $M$ von $k'$ muss außerdem auf einer zu $g$ senkrechten Geraden durch $A$ liegen, damit $k'$ die Gerade $g$ in $A$ berührt. Es gibt nun zwei prinzipielle Möglichkeiten, wie sich $k$ und $k'$ berühren können:

   Äußerlich (dann muss der Abstand von $M$ zum Mittelpunkt von $k$ gleich dem Abstand von $M$ zu $A$ plus dem Radius des Kreises $k$ sein) oder innerlich (dann muss der Abstand von $M$ zum Mittelpunkt von $k$ gleich dem Abstand von $M$ zu $A$ minus dem Radius des Kreises $k$ sein). Beide Fällen treten genau je einmal auf (für das äußerliche Berühren zeigt das die Konstruktion von oben, dass innerliche Berühren lässt sich analog begründen, hier muss nur $g$ zu Beginn anders verschoben werden), es gibt also genau zwei Möglichkeiten für $k'$.

2. $g$ ist Tangente an $k$. Ist $A$ der Berührungspunkt von $k$ und $g$, so gibt es unendliche viele Möglichkeiten für $k'$ (jeder Kreis der $g$ in $A$ berührt berührt auch $k$).

   Ist $A$ nicht der Berührungspunkt von $k$ und $g$, so gibt es genau eine Möglichkeit für $k$:

   Es gibt nämlich theoretisch wieder die Fälle des inneren und äußeren Berührens wie oben, das äußere Berühren tritt genau einmal auf, dass innere Berühren jedoch nicht, denn hier liegt $A$ auf der verschobenen Gerade, die konstruierte Ortslinie ist hier eine Senkrechte durch den Mittelpunkt von $k$ und diese hat mit der Senkrechten zu $g$ durch $A$ keinen Schnittpunkt.

3. $g$ ist Sekante an $k$. Ist $A$ einer der Schnittpunkte von $k$ und $g$ so gibt es keine Möglichkeit für $k'$ (denn jeder Kreis, der $g$ in $A$ berührt schneidet $k$ in $A$).

   Liegt $A$ außerhalb von $k$, so gibt es genau zwei Möglichkeiten (hier kann nämlich, anders als in Fall 1, der Kreis $k'$ in einer beliebigen Halbebene bzgl. $g$ liegen, da $A$ außerhalb von $k$ liegt ist aber nur äußeres Berühren möglich).

   Analog dazu gibt es im Fall, dass $A$ in $k$ liegt auch genau zwei Möglichkeiten.

*Aufgabe gelöst von ZePhoCa*

*Rechnerische Lösung:*

Sei $h$ der Abstand des Kreismittelpunkts von $k$ zur Gerade $g$ und $d$ der Abstand vom Fußpunkt der Strecke $h$ auf $g$ zum Punkt $A$. $r, r'$ bezeichnen die Radien. Dann erhalten wir mittels Pythagoras:

$$(h - r')^2 + d^2 = (r + r')^2 \iff h^2 + d^2 - r^2 = 2(r + h)r'$$

Nun können wir über ein rechtwinkliges Dreieck ein Quadrat mit der Fläche $h^2 + d^2 - r^2$ konstruieren und dazu ein Rechteck mit gleicher Fläche, wobei die eine Seite $2(r + h)$ bekannt ist und die andere dann den gesuchten Radius ergibt.

Falls $k \cap g \neq \emptyset \iff h \leq r$, gibt es eine zweite Lösung über die Gleichung

$$(h + r')^2 + d^2 = (r + r')^2$$

*Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314*

## Quellenverzeichnis

**(2)** Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972