6. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

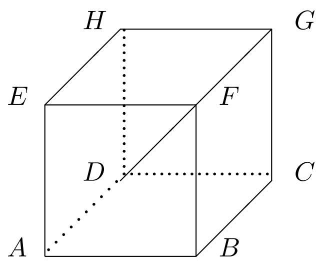
6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061031:

Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$.

Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A, B, C, G, H, E von der Diagonalen $\overline{DF}$!



Aufgabe 061032:

Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

gilt!

Aufgabe 061033:

Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:

$$\overline{AB}=30,\quad \overline{AE}=63,\quad \overline{AF}=50,\quad \overline{BF}=40,\quad \overline{CD}=49,\quad \overline{CE}=200,\quad \overline{DF}=38.$$

Welche Entfernung haben B und D voneinander?

Aufgabe 061034:

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung $x^2+x+3=k(x^2+5)$ eine in x quadratische Gleichung ist, die

a) eine Doppellösung hat!

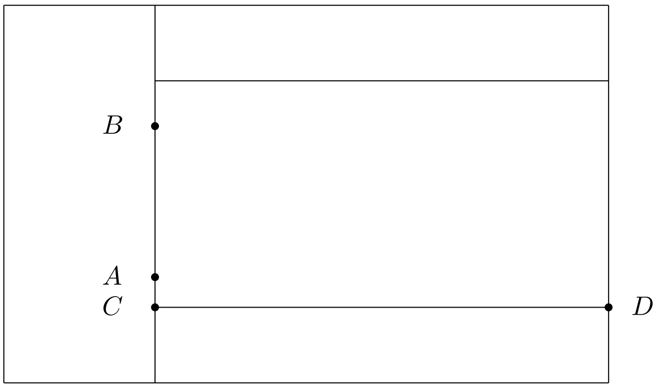
b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

Aufgabe 061035:

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{1}{2}\cdot \lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}>1\ !$$

Aufgabe 061036:



Die Abbildung stellt den Grundriß eines Teiles eines Theaterraumes dar. $\overline{AB}$ ist die Bühnenbreite, $\overline{CD}$ die Flucht der Seitenlogen.

Es sind alle Punkte P auf $\overline{CD}$ zu ermitteln, von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!

Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\sphericalangle APB$ zu verstehen. Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.

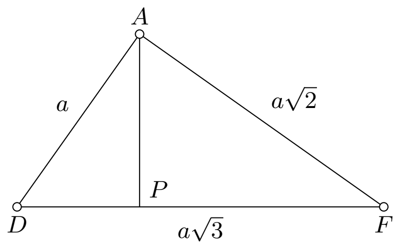
Anmerkung: Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061031:

Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe.



Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa ΔADF. Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ϵ_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe HP ist daher, wie aus $\Delta ADP \sim \Delta DFA$ folgt,

$$h = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 061032:

Wegen $a > 0, b > 0, c > 0$ gilt

$$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \leq 0 \qquad \text{d.h.}$$
$$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6abc \leq 0$$

Durch Addition von $pabc$ erhält man

$$(bc + ac + ab)(a + b + c+) \leq 9abc$$

Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 061033:

Es ist

$$EA + AF + FD + DC = 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = EC$$

Daraus folgt, dass die Orte E, A, F, D, C in dieser Reihenfolge auf ein und derselben geraden liegen. A, B, F sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\angle ABF$. Dies folgt wegen

$$AB^2 + BF^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = AF^2$$

aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras.

Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von B auf AF. Wegen $\Delta BFQ \sim \Delta AFB$ ist dann

$$BQ = \frac{AB \cdot BF}{AF} = 24 \qquad \text{und} \qquad QF = \frac{BF^2}{AF} = 32$$

Also ist $QD = QF + FD = 70$. Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔBQD nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$BD^2 = BQ^2 + QD^2 = 24^2 + 70^2 = 4(12^2 + 35^2) = 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit $BD = 74$. Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061034:

Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k \neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{1-k}x + \frac{3-5k}{1-k} = 0 \tag{1}$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanten nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}} = \frac{1 \pm \sqrt{-20k^2 + 32k - 11}}{2(k-1)}$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2 + 32k - 11 = 0 \qquad \text{d.h.} \qquad k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0$$

ist. Das ist für $k = \frac{11}{10}$ und für $k = \frac{1}{2}$ und nur für diese der Fall.

b) Die Gleichung (1) hat genau dann zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen, wenn $-20k^2+32k-11 > 0$ ist. Daraus folgt

$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0$$

und schließlich

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{11}{20}\right) < 0$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder $k - \frac{1}{2} > 0$ und gleichzeitig $k - \frac{11}{20} < 0$ ist, also für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$, oder

$k - \frac{1}{2} < 0$ und gleichzeitig $k - \frac{11}{20} > 0$ ist. Es gibt keinen Wert von k, der den letzten beiden Ungleichungen gleichzeitig genügt.

Also hat die Gleichung (1) für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k voneinander verschiedene reelle Lösungen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061035:
Zuerst zum Definitionsbereich:

Da die Logarithmus-Funktion nur für positive Argumente definiert ist, muss also wegen des ersten Summanden $x > \frac{1}{2}$ und aufgrund des zweiten $x > 9$ gelten. Zusammen bleiben also genau die reellen Zahlen $x > 9$ zu betrachten.

Für die ist dann $\lg \sqrt{x-9} = \frac{1}{2} \cdot \lg(x-9)$ und somit (nach Multiplikation mit 2 die zu betrachtende Ungleichung äquivalent zu $\lg((2x-1)\cdot(x-9)) > 2$ bzw. aufgrund der Monotonie der Logarithmusfunktion auch zu $(2x-1)(x-9) > 100$.

Dies führt auf die quadratische Ungleichung $2x^2 - 19x - 91 > 0$ bzw. $x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2} > 0$.

Das quadratische Polynom $x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2}$ beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{19}{4} \pm \sqrt{\frac{361}{16} + \frac{91 \cdot 8}{16}} = \frac{19 \pm \sqrt{1089}}{4} = \frac{19 \pm 33}{4}$$

also $x_1 = \frac{19-33}{4} = -\frac{7}{2}$ und $x_2 = \frac{19+33}{4} = 13$. Damit nimmt das betrachtete quadratische Polynom genau für die reellen Zahlen x mit $x < -\frac{7}{2}$ und diejenigen mit $x > 13$ positive Funktionswerte an.

Zusammen mit der Betrachtung des Definitionsbereichs der Ausgangsungleichung wird diese also genau von allen reellen Zahlen $x > 13$ erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061036:
Sei P auf CD mit $P \neq C$ gegeben. Dann sind die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, sodass sich nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck für die Winkel bei P die Gleichungen $\tan(\sphericalangle CPA) = \frac{|AC|}{|CP|}$ und $\tan(\sphericalangle CPB) = \frac{|BC|}{|CP|}$ ergeben.

Für den Sichtwinkel auf die Bühne von P aus gilt also

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CPB - \sphericalangle CPA = \arctan\left(\frac{|BC|}{|CP|}\right) - \arctan\left(\frac{|AC|}{|CP|}\right)$$

Der Formelsammlung entnehmen wir für reelle Zahlen x und y mit $xy > -1$ das Additionstheorem $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$.

Setzen wir unsere konkreten Verhältnisse aus der Aufgabe für x und y ein (die jeweils positiv sind, ihr Produkt also sicher größer als -1 ist), so erhalten wir

$$\sphericalangle APB = \arctan\left(\frac{\frac{|BC|}{|CP|} - \frac{|AC|}{|CP|}}{1 + \frac{|BC|}{|CP|} \cdot \frac{|AC|}{|CP|}}\right) = \arctan\left(\frac{|AB|}{|CP| + \frac{|BC|\cdot|AC|}{|CP|}}\right)$$

Da die Arcustangens-Funktion streng monoton steigend ist, nimmt sie ihren maximalen Wert genau dann an, wenn auch das Argument maximiert wird. Damit erhalten wir den maximalen Sichtwinkel $\sphericalangle APB$ genau dann, wenn das Argument des Arcustangens maximal, also, da dessen Zähler nicht von der Wahl von P abhängt, wenn der Nenner minimal wird. Es verbleibt demnach der Ausdruck $|CP| + \frac{|BC|\cdot|AC|}{|CP|}$ zu minimieren.

Für positive reelle Zahlen x und c betrachten wir die Funktion $f(x) = x + \frac{c}{x}$. Setzen wir $x := t \cdot \sqrt{c}$ mit einer positiven reellen Zahl t hier ein, erhalten wir

$$f(t \cdot \sqrt{c}) = t \cdot \sqrt{c} + \frac{c}{t \cdot \sqrt{c}} = \sqrt{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

was genau für $t = 1$, also $x = \sqrt{c}$ minimal wird.

Wenden wir dies auf unseren zu betrachtenden Term $|CP| + \frac{|BC|\cdot|AC|}{|CP|}$ an, so wird dieser minimal – und der Sichtwinkel auf die Bühne maximal – , wenn $|CP| = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ gilt.

Dies beschreibt (da man nur "vor" und nicht auch "hinter" der Bühne sitzen kann) den eindeutigen Platz auf der Seitenloge mit dem besten Blickwinkel auf die Bühne.

Ist die Seitenloge zu kurz, um den so errechneten Punkt P mit größtem Blickwinkel auf die Bühne zu enthalten, d.h., ist $|CD| < \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$, so ist $P = D$ zu wählen, also mit maximaler Entfernung zur Bühne, da der Blickwinkel auf die Bühne, wenn man den Punkt P auf dem von C ausgehenden und durch D verlaufenden Strahl wandern lässt, am Punkt $P = C$ gleich 0 beträgt, dann bis zum Maximum bei $P = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ streng monoton wächst, und abschließend mit gegen unendlich gehender Entfernung $|PC|$ wieder streng monoton auf Null fällt.

Ist also die Seitenloge schon vor Erreichen des Maximums zu Ende, ist genau dieser auf ihr am weitesten von der Bühne entfernte Punkt derjenige mit dem größten Sichtwinkel auf die Bühne.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Geometrische Lösung:

Behauptung: Falls der Umkreis von ABP die Gerade CD schneidet, haben die Punkte auf der Sekante einen größeren Öffnungswinkel. Beweis: Sei Q ein Punkt auf der Sekante. Betrachte die Verlängerung AQ' der Strecke AQ, so dass Q' auf dem Umkreis liegt. Dann gilt

$$\sphericalangle AQB = \sphericalangle AQ'B + \sphericalangle Q'BQ > \sphericalangle AQ'B = \sphericalangle APB\ .$$

Für einen Punkt R auf der Halbgerade CD außerhalb des Umkreises gilt analog $\sphericalangle ARB < \sphericalangle APB$. Also ist der Winkel $\sphericalangle APB$ maximal, wenn CD eine Tangente des Umkreises von ABP ist. Aus dem Sekanten-Tangenten-Satz folgt

$$|CP|^2 = |AC| \cdot |BC| \Rightarrow |CP| = \sqrt{|AC| \cdot |BC|}$$

Im Fall $|CD| < |CP|$ liegt die Sekante des Umkreises ABD nicht auf der Strecke CD. Somit ist D der optimale Punkt.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift