6. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061041:

Man beweise:

Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl $m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$ durch 30 teilbar.

Aufgabe 061042:

Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I_{\Delta ABC}$ eines Dreiecks ΔABC, das in der Ebene ε liegt. Die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$.

Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_{1\Delta A_1B_1C_1}$?

Aufgabe 061043:

In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:

> Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ΔABC; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ΔPQR so, daß P innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$, Q innerer Punkt der Strecke $\overline{CA}$ und R innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$ ist.

Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

> Anita glaubt, daß die Aufgabe nicht für jedes Dreieck ΔABC lösbar ist.
>
> Berthold ist der Meinung, daß es für jedes Dreieck ΔABC genau eine Lösung gibt.
>
> Claus nimmt an, für jedes Dreieck ΔABC gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke ΔPQR, die Lösung sind, sind einander kongruent.
>
> Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck ΔABC gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck ΔABC mit der Eigenschaft, daß nicht alle Dreiecke ΔPQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

Aufgabe 061044:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC; wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\sphericalangle ACB$.

Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

Aufgabe 061045:
Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl.

Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x} \text{ genügen!}$$

Aufgabe 061046:
Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leq 100 \text{ an!}$$

Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1,y_1), (x_2,y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

6. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061041:

Voraussetzung: $m, n \in \mathbf{N}$

Behauptung: $30 \mid m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$

Beweis:

Es gilt mit binomischer Formel: $m^4 - n^4 = (m^2 + n^2) \cdot (m^2 - n^2) = (m^2 + n^2) \cdot (m + n) \cdot (m - n)$ (1)
wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ muß man auf Teilbarkeit durch 2, 3 und 5 untersuchen

1. Teilbarkeit durch 2

   sind m oder n gerade so folgt die Teilbarkeit trivial

   sind m und n ungerade so ist der Faktor $m - n$ in (1) gerade und damit das gesamte Produkt

2. Teilbarkeit durch 3

   sind m oder n durch 3 teilbar, so folgt die Teilbarkeit trivial

   lassen m und n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist der Faktor $m - n$ in (1) durch 3 teilbar

   letzter möglicher Fall ist ein Rest 1 und ein Rest 2: da m und n symmetrisch sind, gelte o.B.d.A. m lasse bei Division den Rest 1 ($m = 3i + 1$) und n den Rest 2 ($n = 3k + 2$); dann ist der Faktor $m + n = 3i + 1 + 3k + 2 = 3(i + k + 1)$ durch 3 teilbar, mithin auch das Produkt

3. Teilbarkeit durch 5

   sind m oder n durch 5 teilbar so folgt die Teilbarkeit trivial

   Egal, welchen Rest eine Zahl bei Teilbarkeit durch 5 läßt (außer bei 0), so läßt die 4. Potenz dieser Zahl immer den Rest 1 bei Division durch 5:

   (a) $m = 5k + 1 \equiv 1(5) \Rightarrow m^4 \equiv (1)^4 \equiv 1(5)$
   (b) $m = 5k + 2 \equiv 2(5) \Rightarrow m^4 \equiv (2)^4 \equiv 16 \equiv 1(5)$
   (c) $m = 5k + 3 \equiv 3(5) \Rightarrow m^4 \equiv (3)^4 \equiv 81 \equiv 1(5)$
   (d) $m = 5k + 4 \equiv 4(5) \Rightarrow m^4 \equiv (4)^4 \equiv 256 \equiv 1(5)$

   Damit ist der Faktor $(m^4 - n^4)$ durch 5 teilbar

Da 2, 3 und 5 den Ausdruck teilt, wird er auch von $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ geteilt

Aufgeschrieben und gelöst von Volker Pöschel

Lösung 061042:
Sei ϕ der Winkel zwischen den beiden Ebenen und g ihre Schnittgerade.

Durch die Orthogonalprojektion werden Strecken in ϵ, die parallel zu g sind, auf kongruente Strecken in ϵ_1 abgebildet.

Für Strecken in ϵ, die senkrecht zu g verlaufen, sind deren Bilder in ϵ_1 dagegen um den Faktor $\cos\phi$ gestreckt (bzw., da $\cos\phi \leq 1$ ist, eher "gestaucht"). Die Bilder von Parallelen zu g in ϵ sind auch weiterhin in ϵ_1 parallel zu g; analog werden auch die zu g in ϵ orthogonalen Geraden wieder auf in ϵ_1 zu g orthogonale Geraden abgebildet.

Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ in ϵ. Ist eine der Seiten des Dreiecks (o.B.d.A. AB) parallel zu g, dann ist ihr Bild (also dann A_1B_1) kongruent zu ihr, während ihre Höhe (h_{AB}) senkrecht zu g verläuft, und so dessen Bild ($h_{A_1B_1}$) eine um den Faktor $\cos\phi$ gestreckte Länge besitzt. Da die Bilder dieser beiden Strecken auch in der Zielebene senkrecht aufeinander stehen, berechnet sich der Flächeninhalt des Bilddreiecks zu

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot |A_1B_1| \cdot |h_{A_1B_1}| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \cos\phi \cdot h_{AB} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABC}$$

Ist dagegen keine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ parallel zu g, dann schneidet (genau) eine der Parallelen in ϵ zu g durch die drei Eckpunkte die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite in einem inneren Punkt.

Sei dies o.B.d.A. die Parallele durch A; und deren Schnittpunkt mit BC heiße D. Dann ist AD parallel zu g und die Höhen von B und C auf AD orthogonal zu g, sodass sich auf diese Teildreiecke die eben gemachte Überlegung jeweils einzeln anwenden lässt, also (mit D_1 als Bildpunkt von D bezüglich der Orthognalprojektion)

$$I_{\triangle A_1B_1D_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABD} \qquad \text{und} \qquad I_{\triangle A_1C_1D_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ACD}$$

gilt.

Abschließend ist festzustellen, dass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sich aus den jeweiligen zwei Teildreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ bzw. entsprechend $\triangle A_1B_1D_1$ und $\triangle A_1C_1D_1$ zusammensetzen, sich ihre Flächeninhalte also aus der Summe derer der jeweiligen beiden Teildreiecke ergibt und damit in jedem Fall gilt:

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABC}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061043:
Wir zeigen, dass die Meinung und Behauptung von Dagmar richtig und daher die zu ihnen in Widerspruch stehenden Meinungen der drei anderen falsch sind.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass im gegebenen Dreieck (Bild)

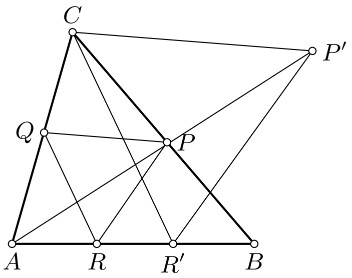
$$|\sphericalangle BCA| \leq |\sphericalangle ABC| \leq |\sphericalangle CAB|$$

insbesondere also

$$|\sphericalangle BCA| \leq 60^\circ \qquad \text{und} \qquad |\sphericalangle CAB| \geq 60^\circ$$

gilt.

Unter diesen Bedingungen sei R' ein beliebiger (innerer) Punkt von AB. P' sei derjenige Punkt, für den $\triangle P'CR'$ gleichseitig ist und der auf der anderen Seite von $g_{CR'}$ wie A liegt. Dann liegt P' auf der anderen Seite von g_{BC} wie A, weil $|\sphericalangle BCA| \leq 60^\circ$ und $|\sphericalangle P'CA| = |\sphericalangle P'CR'| + |\sphericalangle R'CA| > 60^\circ$ gilt.



Außerdem ist $|\sphericalangle P'CA| \leq 120°$ und $|\sphericalangle P'R'A| \leq 60° + |\sphericalangle CR'A| < 180°$, so dass $AR'P'C$ ein konvexes Viereck ist und insbesondere R' und C auf verschiedenen Seiten von $g_{AP'}$ liegen.

Da R' Punkt von AB ist, liegt B auf derselben Seite von $g_{AP'}$ wie R', so dass die Strecken BC und AP' einen Schnittpunkt haben, der mit P bezeichnet werde. Ist nun Q derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch C, für den

$$AQ : AC = AP : AP' \tag{1}$$

gilt, und R derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch B, für den

$$AR : AB = AP : AP' \tag{2}$$

gilt, so ist, da wegen $P \in AP'$ sicher $AP : AP' < 1$ ausfällt, Q innerer Punkt von AC und R innerer Punkt von AB.

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt aufgrund von (1)

$$g_{PQ} \parallel g_{P'C} \quad \text{und aufgrund von (2)} \quad g_{PR} \parallel g_{P'R'}$$

Daher folgt aus dem 2. Strahlensatz, dass die drei Beziehungen

$$PQ : P'C = AP : AP' \qquad ; \qquad PR : P'R' = AP : AP'$$
$$\sphericalangle QPR = \sphericalangle CP'R'$$

bestehen. Da $\triangle P'C'R'$ gleichseitig ist, folgt somit

$$PQ = PR \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle QPR = 60°$$

so dass $\triangle PQR$ gleichseitig ist.

Hieraus ergibt sich weiter, dass $QR \parallel CR'$ ist, so dass keine zwei der gleichseitigen Dreiecke, die zu verschiedenen Lagen von R' auf AB gehören, zusammenfallen können. Es gibt also zu jedem Dreieck ABC unendlich viele verschiedene gleichseitige Dreiecke, die der im Zirkel gestellten Aufgabe entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es bei mindestens einem Dreieck ABC unter diesen gleichseitigen Dreiecken mindestens zwei zueinander inkongruente gibt. Dazu wählen wir $\triangle ABC$ gleichseitig. Sind P_1, Q_1, R_1 die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB, so ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig and es gilt

$$P_1Q_1 = \frac{1}{2}AB$$

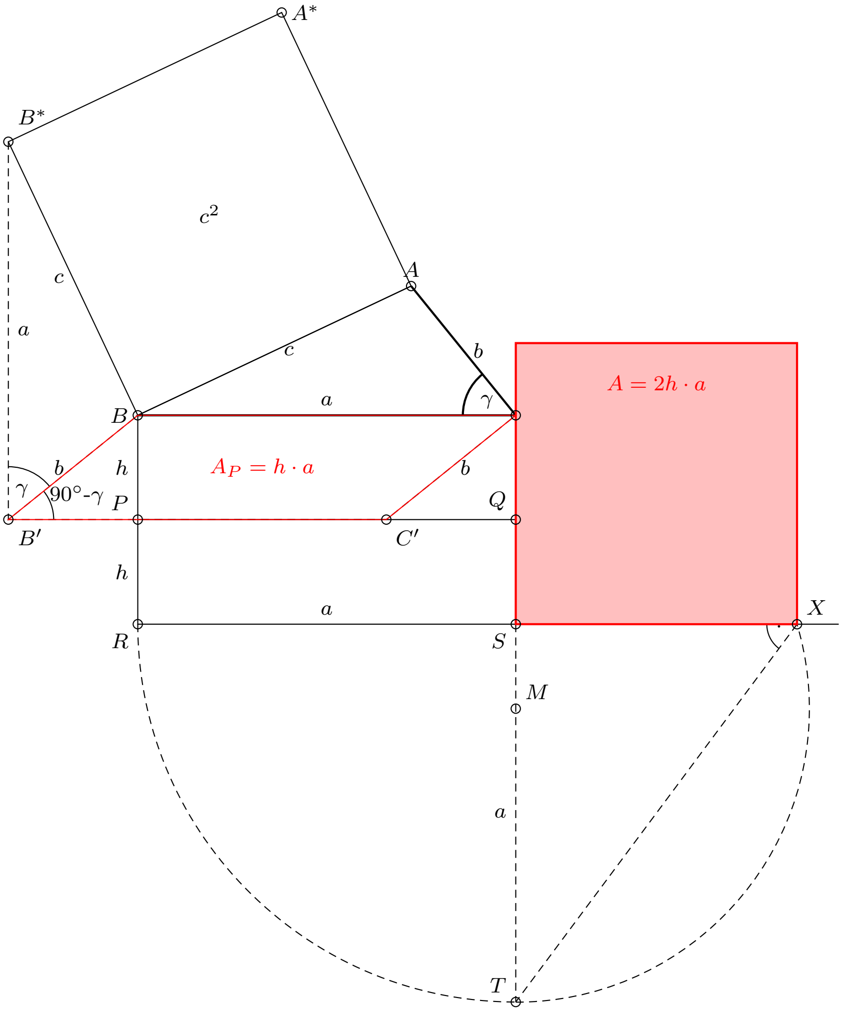
Sind P_2, Q_2, R_2 die Mittelpunkte von P_1C, Q_1A bzw. R_1B, so ist auch $\triangle P_2Q_2R_2$ gleichseitig und es gilt nach dem Kosinussatz

$$P_2Q_2 = \sqrt{BP_2^2 + BQ_2^2 - 2 \cdot BP_2 \cdot BQ_2 \cdot \cos 60°} = AB\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$$
$$= AB\frac{\sqrt{7}}{4} > P_1Q_1$$

so dass $\triangle P_1Q_1R_1$ und $\triangle P_2Q_2R_2$ infolge unterschiedlicher Seitenlängen inkongruente gleichseitige Dreiecke sind.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061044:



1. Errichte das Quadrat über $|AB| = c$.
2. Ergänze an der Quadratseite BB^* das zum Dreieck ABC kongruente Dreieck $B'BB^*$.
3. Bilde das Parallelogramm $B'C'CB$ aus den Seiten $|BB'|$ und $|BC|$; dieses hat den Flächeninhalt $A_P = a \cdot h = ab\sin(90° - \gamma) = ab\cos(\gamma)$.
4. Bilde aus dem Parallelogramm das flächengleiche Rechteck $PQCB$; verdopple das Rechteck zum Rechteck $RSCB$; dieses hat den Flächeninhalt $A = 2h \cdot a$.
5. Verlängere die Rechteckseite $|CS|$ um $a = |RS|$, Endpunkt sei T.
6. Errichte über der Strecke $|CT|$ den Thaleskreis (Mittelpunkt sei M).
7. Bestimme den Schnittpunkt derjenigen Geraden durch $|RS|$ mit dem Thaleskreis; der Schnittpunkt sei X.

8. Dann gilt für das rechtwinklige Dreieck CTX nach dem Höhensatz: Das Rechteck aus den Höhenabschnitten ($2h$ und a) der zur Hypotenuse gehörenden Höhe ist so groß wie das Quadrat über der Höhe; mit anderen Worten: $A = 2h \cdot a = 2b\cos(\gamma) \cdot a = 2ab\cos(\gamma)$.

Aufgeschrieben und gelöst von Hyperplot

Lösung 061045:

Multiplikation der Gleichung mit $\sqrt{a+x}$ überführt diese in (die wegen $a + x \neq 0$ äquivalente Gleichung) $a + x - |a| = \sqrt{(2a+x)\cdot(a+x)}$.

1. Fall: $a > 0$.

Dann ist $|a| = a$ und man erhält durch Quadrieren $x^2 = x^2 + 3ax + 2a^2$ bzw. $x = -\frac{2}{3}\cdot a$. Damit erhält man $a + x = \frac{1}{3}\cdot a$ bzw.

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{\frac{1}{3}a} - \sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{3}a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{a} - \sqrt{3a} = \sqrt{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) < 0 \leq \sqrt{2a-x}$$

also einen Widerspruch zur Ausgangsgleichung, sodass es in diesem Fall keine Lösungen gibt.

2. Fall: $a \leq 0$.

Dann ist $|a| = -a$, sodass die Gleichung übergeht in $2a + x = \sqrt{(2a+x)\cdot(a+x)}$.

Fall 2.1: $2a+x = 0$. (Wegen $a+x \neq 0$ ist in diesem Fall $a \neq 0$, denn sonst würde aus $2a+x = 0$ nach Subtraktion von $a = 0$ sofort auch $a + x = 0$ folgen.) Dann ist $x = -2a$ und $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0 = \sqrt{2a+x}$, sodass dies Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

Fall 2.2: Es ist $2a + x \neq 0$, also auch $\sqrt{2a+x} \neq 0$, sodass wir dadurch dividieren können. Damit erhalten wir die Gleichung $\sqrt{2a+x} = \sqrt{a+x}$ bzw. nach Quadrieren $2a + x = a + x$, also $a = 0$. Tatsächlich vereinfacht sich aber in diesem Fall die Ausgangsgleichung zu $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{0}{x}} = \sqrt{x}$, was für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Zusammenfassung: Für positive a hat die Gleichung keine Lösung, für negative a ist jeweils $x = -2a$ die einzige Lösung und für $a = 0$ erfüllt jede positive reelle Zahl x die Gleichung.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061046:

sei $x = 0$ dann sind für y möglich: -100 ... 100 $\Rightarrow$ Anzahl: 201

sei $x = -1$ oder 1 dann sind für y möglich: -99 ... 99 $\Rightarrow$Anzahl: $2 \cdot 199$

sei $x = -2$ oder 2 dann sind für y möglich: -98 ... 98 $\Rightarrow$ Anzahl $2 \cdot 197$

u.s.w. bis

sei $x = -99$ oder 99 dann sind für y möglich -1 ...1 $\Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 3$

sei $x = -100$ oder 100 dann sind für y möglich: 0 $\Rightarrow$ Anzahl : $2 \cdot 1$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{100}(2 \cdot i - 1) + 201 = 2 * 100^2 + 201 = 20201$$

Aufgeschrieben und gelöst von Matthias Lösche

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972