7. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070731:
Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.

Wieviel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

Aufgabe 070732:
Beweise folgende Behauptung!

Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks ΔABC und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

Aufgabe 070733:
Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu "bezahlen".

Wie müßten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

Aufgabe 070734:
Gegeben sei die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$. In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, daß $x = 11$ die Gleichung erfüllt.

Wie lautet diese Zahl?

Aufgabe 070735:
Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.

Beweise, daß das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 läßt!

Aufgabe 070736:
Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks ΔABC werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$ und $\overline{AA'} = \overline{CA}$, abgetragen.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

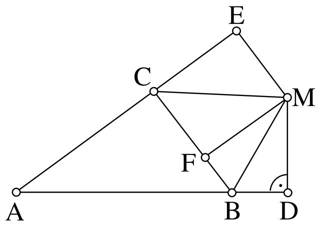
Lösung 070731:

Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: "Wieviel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?" Dabei ist am Schluß die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren.

Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden gehören. Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070732:



Die Dreiecke ΔCFM und ΔCME sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein.

Daher gilt $\overline{ME} = \overline{MF}$. Ebenso sind die Dreiecke ΔMFB und ΔMDB kongruent, woraus $\overline{MF} = \overline{MD}$ folgt.

Mithin gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070733:

Die drei Angler fingen zusammen sieben Fische. Sie teilten sie zu gleichen Teilen untereinander auf. Damit bekam jeder Angler genau $\frac{7}{3}$ Fische.

Der erste Angler fing $3 = \frac{9}{3}$ Fische, der zweite Angler fing $4 = \frac{12}{3}$ Fische und der dritte Angler fing keine Fische. Da jeder Angler den gleichen Anteil von $\frac{7}{3}$ Fisch frühstückte, muss Angler eins also $\frac{9}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$ Fisch und Angler zwei $\frac{12}{3} - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$ Fisch an Angler drei abgegeben haben.

Der Betrag von 7 Pfennigen ist folglich im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{5}{3} = 2 : 5$ an Angler eins und zwei aufzuteilen. Zwei der sieben Pfennige bekam damit Angler eins und fünf Pfennige Angler zwei.

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 070734:

(I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung $\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt

$a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}$.

Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft.

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{123}{12} = \frac{41}{4} \text{ und}$$
$$x - \frac{3}{4} = 11 - \frac{3}{4} = \frac{41}{4},$$

so daß im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 070735:

Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz). Daher gilt:

$$\begin{aligned} n \cdot m &= (5n' + 3) \cdot (5m' + 3) \\ &= 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 \\ &= 5[5n'm' + 3(n' + m') + 1] + 4, \end{aligned}$$

d.h. $n \cdot m$ läßt bei Division durch 5 den Rest 4.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

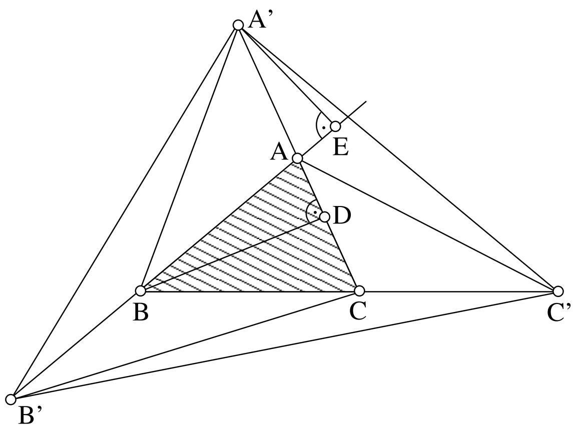
Lösung 070736:

Zum Beweis verwendet man den Satz, daß Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Behauptung: Es ist $I_{\Delta A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$, wenn $I_{\Delta A'B'C'}$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ und I_{ABC} den des Dreiecks ΔABC bezeichnet.

Beweis: Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf $A'C$ (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung). Dann gilt: ΔABC ist flächengleich $\Delta AA'B$; denn es gilt $\overline{AC} = \overline{AA'}$ und $\overline{BD} = \overline{BD}$ (als gemeinsame Höhe).

$\Delta BAA'$ ist flächengleich $\Delta B'BA'$; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck $\Delta B'AA'$, und es gilt: $\overline{BA} = \overline{B'B}$ sowie $\overline{A'E} = \overline{A'E}$. Daraus folgt, daß $\Delta B'BA'$ auch flächengleich ΔABC ist. Entsprechend beweist man, daß die Dreiecke $\Delta A'AC'$, $\Delta ACC'$, $\Delta C'CB'$ und $\Delta CBB'$ alle flächengleich dem Dreieck ΔABC sind.



Das Dreieck ΔABC liegt ganz im Innern des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ (die Winkel $\sphericalangle A'CC'$, $\sphericalangle B'BC'$ und $\sphericalangle B'AA'$ sind als Außenwinkel des Dreiecks ΔABC sämtlich kleiner 180°). Daher erhält man den Flächeninhalt $I_{\Delta A'B'C'}$, indem man den Flächeninhalt der sieben zu ΔABC flächengleichen Dreiecke ΔABC, $\Delta AA'B$, $\Delta B'BA'$, $\Delta A'AC'$, $\Delta ACC'$, $\Delta C'CB'$ und $\Delta CBB'$ addiert.

Mithin gilt: $I_{\Delta A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$.$\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.