7. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070911:
Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

(1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.

(2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.

Aufgabe 070912:
Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Aufgabe 070913:
Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes n-Eck haben kann.

Aufgabe 070914:
Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 "Pluspunkte" gegeben.

Am Tag nach dem Abschluß des Turniers hört Peter den Schluß einer Radiomeldung: "...Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, daß seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Plazierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln.

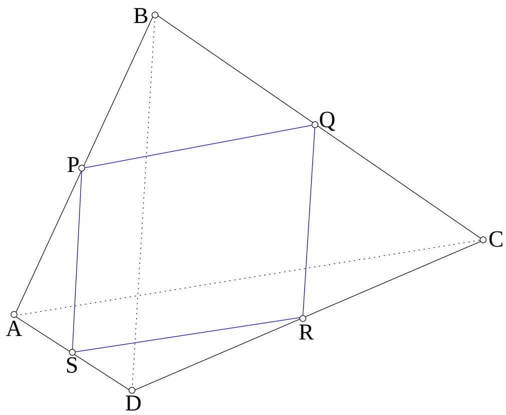
Wie ist das möglich?

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070911:

Sei das konvexe Viereck $ABCD$ gegeben. Die Diagonalen sind demnach $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.



Durch die Angabe, dass 2 Seiten des (vermeintlichen) Parallelogramms parallel zu $\overline{AC}$ und auch halb so groß wie $\overline{AC}$ sind, sind die 4 Eckpunkte des (vermeintlichen) Parallelogramms schon bestimmt. Denn es existiert genau eine solche Strecke im Dreick ABC und eine im Dreieck ACD.
Die eine Strecke sei $\overline{PQ}$ mit P auf $\overline{AB}$ und Q auf $\overline{BC}$, die andere $\overline{RS}$ mit R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$.
Wir wissen nach Voraussetzung, dass $\overline{PQ} = \overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ gilt und dass diese Strecken parallel sind. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass $\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ gilt und dass auch diese Strecken parallel sind, dann sind wir fertig.
Nach Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AP}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Daraus folgt $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Der Punkt P halbiert also die Seite auf der er liegt. Gleiches lässt sich für Q, R und S schließen.
Es gilt also $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$. Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit, dass $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ und $\overline{BD}$ zueinander parallel sind. Mit dem 2. Strahlensatz folgt direkt $\frac{\overline{PS}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$ (und wir sind fertig).

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Lösung 070912:

Es soll also $4 \cdot abcde5 = 5abcde$ erfüllt werden. Die von hinten nach vorn zu ermittelnde Stelle von $5abcde$ ist direkt aus dem Produkt derselben in $abcde5$ und 4 sowie einem gegebenenfalls noch zu berücksichtigenden

Übertrag ersichtlich. Man erhält in dieser Reihenfolge eindeutig $e = 0$, $d = 2$, $c = 8$, $b = 2$ und $a = 1$.

Damit lautet die Zahl im Dezimalsystem 128205.

Lösung 070913:

In einem konvexen Polygon sind alle Innenwinkel kleiner als 180°. Ein konvexes n-Eck hat bekanntlich die Innenwinkelsumme $180° \cdot (n-2)$. Es habe k rechte Winkel.

(1) Sei $k = n$.

$$\begin{aligned} 90° \cdot n &= 180° \cdot (n-2) \\ n &= 2 \cdot (n-2) \\ n &= 2n - 4 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Dies ist also nur dann möglich, wenn $n = 4$ ist. $k = n = 4$ ist bei einem Rechteck erfüllt.

(2) Sei $k < n \Rightarrow n - k > 0$
Die restlichen $n - k$ Innenwinkel (die ja existieren, weil $n - k > 0$) sind alle kleiner als 180° (konvexes Polygon!). Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 180° \cdot (n-2) &< 90° \cdot k + 180° \cdot (n-k) \\ 180° \cdot n - 360° &< 90° \cdot k + 180° \cdot n - 180° \cdot k \\ -360° &< -90° \cdot k \\ 4 &> k \end{aligned}$$

Folglich kann in diesem Fall die natürliche Zahl k, die echt kleiner als 4 sein soll, höchstens 3 sein. Bei jedem $n > 4$ ist dies auch möglich. Zum Beispiel kann ein Polygon drei rechte Winkel und $n - 3$ Winkel der Größe $(180° \cdot (n-2) - 270°)/(n-3)$ haben, die Winkel haben dann die Summe $180°(n-2)$.

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 270°}{n-3} = 180° - \tfrac{90°}{n-3}$$

Das heißt: jeder dieser Winkel wäre kleiner als 180° und größer als 90°. Wäre ein weiterer Winkel 90°, so würde mindestens ein Winkel größer als 180° sein oder alle nicht-90°-Winkel wären gleich 180°:

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 360°}{n-4} = 180°$$

Für $n = 3$ kann es maximal einen rechten Winkel geben, da sonst das Dreieck entartet.

Antwort:
Für $n = 3$ gibt es maximal einen rechten Winkel.
Für $n = 4$ gibt es maximal 4 rechte Winkel.
Für $n > 4$ gibt es maximal 3 rechte Winkel.

Aufgeschrieben und gelöst von Annika Heckel

Lösung 070914:

Da A gegen B das einzige unentschieden ausgegangene Spiel ist, haben A und B je eine ungerade, C und D je eine gerade Punktzahl. Die Summe dieser Punktzahlen ist zwölf, da genau sechs Spiele mit je zwei vergebenen Punkten ausgetragen wurden. Die Zahl Eins kann nicht vergeben worden sein, weil sonst D als letzte Mannschaft und, mit gerader Punktzahl versehen, null Punkte erhalten hätte. Also hätte D jedes Spiel verloren und daher jede andere Mannschaft mindestens zwei Punkte gewonnen.

Mithin lautet die Punkteverteilung 0, 3, 4, 5, da keine Mannschaft mehr als sechs Punkte und keine zwei

Mannschaften gleiche Punktzahl erhalten haben. Da D die letzte Mannschaft ist, hat D Null Punkte. Folglich errang C, Peters Lieblingsmannschaft (denn sie ist als einzige nicht in dem Bericht erwähnt), vier Punkte und damit den zweiten Platz.

Bemerkung: Welche der beiden Mannschaften A, B die drei bzw. fünf Punkte erhalten hat, ist aus den Angaben der Aufgabe nicht zu ermitteln. Der Nachweis der Realisierungsmöglichkeiten ist zur Lösung der Aufgabe nicht nötig, denn wenn die Angaben als wahr vorausgesetzt werden, muß es ja eine Realisierung geben. Zieht man entgegen der Aufgabenstellung in Betracht, daß die Angaben nicht in allen Teilen wahr sind, so kann die Plazierung von C nicht ermittelt werden. Eine Untersuchung, ob die Angaben wahr sein könnten, war nicht gefordert.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag