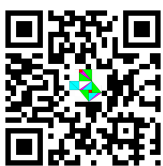
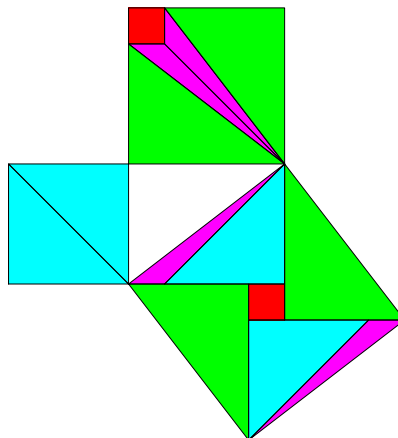
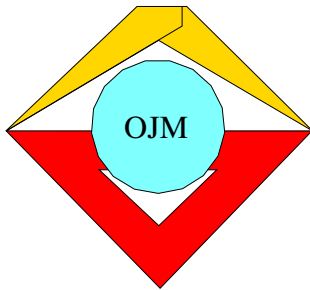




7. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen





7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 070921:

Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n) , für die $m + n = 111$ gilt.

Aufgabe 070922:

Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

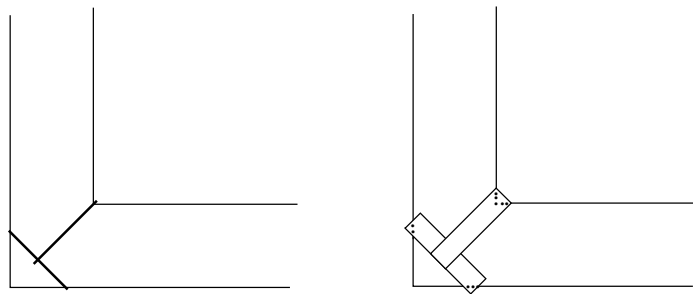
$$a + b \neq 3; \quad a - b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a : b \neq 18,75.$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.

Ermitteln Sie die Zahlen a und b !

Aufgabe 070923:

In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist. Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.



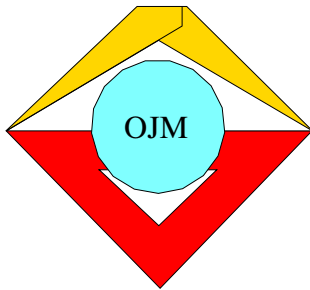
- a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, daß diese Lösung richtig ist!
- b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a , die Breite der Bohlen sei b . Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?

(Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.)

Aufgabe 070924:

Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.

Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!



7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 070921:

Zunächst soll die Variable m mit dem größten zweistelligen Wert, nämlich der Zahl 99 belegt werden. In diesem speziellen Fall müsste der Wert der Variablen $n = 12$ betragen, um die Bedingung der gestellten Aufgabe zu erfüllen, da $111 - 99 = 12$ gilt.

Jetzt soll der Variable n der größte zweistellige Wert, also die Zahl 99 zugewiesen werden.

Nun muss der Wert der Variablen $m = 12$ sein, um der Forderung der Aufgabenstellung gerecht zu werden. Zwischen diesen beiden Grenzwerten für (m, n) , nämlich $(99, 12)$ und $(12, 99)$, sind alle zweistelligen natürlichen Zahlenpaare (m, n) möglich, solange m im Intervall $99 \geq m \geq 12$ bleibt und demnach für die Bildung von n die Gleichung $n = 111 - m$ verwendet wird. Dekrementiert man die Variable m um einen bestimmten Wert und inkrementiert gleichzeitig die Variable n um den gleichen Wert, bleibt auch der Betrag der Summe $m + n$ konstant bei 111.

Zur Bestimmung der Anzahl der möglichen Paare (m, n) genügt es also, die Anzahl der möglichen verschiedenen Werte für die Variable m im Bereich $99 \geq m \geq 12$ zu ermitteln.

Da die Variable m auch die beiden Grenzwerte des Bereiches zwischen 12 und 99 annehmen kann, berechnet sich die Anzahl der möglichen Variablenwerte aus der Differenz des oberen und des unteren Grenzwertes des Bereiches zuzüglich der Ziffer eins. Wir erhalten also $99 - 12 + 1 = 88$ verschiedene Möglichkeiten für m .

Daher gibt es auch genau 88 Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n) für die $m + n = 111$ gilt.

Lösung 070922:

gegeben:

$$a + b \neq 3 \quad a - b \neq 10 \quad a \cdot b \neq 5 \quad a : b \neq 18,75 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

gesucht:

$$a, b$$

Lösung:

Wir bilden zunächst das Produkt aus den linken Seiten der Ungleichungen $a \cdot b$ und $a : b$.
Somit ergibt sich:

$$(a \cdot b) \cdot (a : b) = \frac{a \cdot b \cdot a}{b} = a \cdot a = a^2 \quad (1)$$

Demnach müssen bei den vorgegebenen Werten 3, 10, 5 und 18,75 mindestens 2 Zahlen existieren, deren Produkt eine solche Quadratzahl ergibt, dass deren Wurzel eine rationale Zahl darstellt.

Bei zwei Faktoren (k) und vier möglichen Werten (n) gibt es genau $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ Möglichkeiten zur Bildung dieses Produktes.



Berücksichtigt man nun noch die Tatsache, dass die Faktoren eines Produktes vertauscht werden können (Kommutativgesetz), so bleiben demnach noch $\frac{12}{2} = 6$ verschiedene Möglichkeiten zur Produktbildung übrig.

Diese sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt:

Möglichkeit	Faktor 1	Faktor 2	Produkt (a^2)	Quadratwurzel aus Produkt (a)
1	3	5	15	nicht rational
2	3	10	30	nicht rational
3	3	18,75	56,25	7,5 bzw. -7,5
4	5	10	50	nicht rational
5	5	18,75	93,75	nicht rational
6	10	18,75	187,5	nicht rational

Wie aus der oben stehenden Tabelle ersichtlich, ist nur bei der Möglichkeit drei das gebildete Produkt ein Quadrat aus einer rationalen Zahl. Alle anderen Möglichkeiten erfüllen diese Bedingung nicht und entfallen somit.

Daher bleibt für a^2 nur das Produkt 56,25 übrig, mithin ergibt sich für a :

$$a = \sqrt{56,25}$$

Die Variable a besitzt also zwei Lösungen, nämlich:

$$a_1 = 7,5 \quad a_2 = -7,5 \quad (2)$$

Betrachten wir nun nochmals die Gleichung (1).

Wegen $(a \cdot b) \cdot (a : b) = a^2$ und $a^2 = 56,25 = 3 \cdot 18,75$ gilt:

$$(a \cdot b) \cdot (a : b) = 3 \cdot 18,75 \quad (3)$$

Damit bestehen nun für die beiden Faktoren $(a \cdot b)$ und $(a : b)$ folgende zwei Möglichkeiten:

→ 1. Fall: $(a \cdot b) = 3$; $(a : b) = 18,75$

In diesem ersten Fall ergeben sich wegen $b = \frac{3}{a}$ bzw. $b = \frac{a}{18,75}$ für die Variable b unter Berücksichtigung von (2) folgende Lösungen:

$$b_1 = \frac{3}{a_1} = \frac{3}{7,5} = 0,4 \quad b_2 = \frac{3}{a_2} = \frac{3}{-7,5} = -0,4 \quad (4)$$

→ 2. Fall: $(a \cdot b) = 18,75$; $(a : b) = 3$

Im zweiten Fall ergeben sich wegen $b = \frac{18,75}{a}$ bzw. $b = \frac{a}{3}$ für die Variable b unter Berücksichtigung von (2) folgende Lösungen:

$$b_1 = \frac{18,75}{a_1} = \frac{18,75}{7,5} = 2,5 \quad b_2 = \frac{18,75}{a_2} = \frac{18,75}{-7,5} = -2,5 \quad (5)$$

Die Fallunterscheidung ist damit vollständig.

Wir haben nun bis zu diesem Zeitpunkt für die Variablen a und b vier mögliche Zahlenpaare gefunden. Diese lauten:



Möglichkeit	Variable a	Variable b	Summe $a + b$
1	7,5	0,4	7,9
2	-7,5	-0,4	-7,9
3	7,5	2,5	10,0
4	-7,5	-2,5	-10,0

Um nun die vier verbleibenden Möglichkeiten weiter einzugrenzen, bilden wir schließlich noch die Summe $a + b$ und ergänzen die oben stehende Tabelle entsprechend (siehe Spalte 4).

Nur die Summe der dritten Möglichkeit stimmt mit einer der vorgegebenen Zahlen (3; 5; 10; 18,75) überein. Wir haben demnach genau die Lösung der Aufgabenstellung gefunden. Sie lautet $a = 7,5$ und $b = 2,5$.

Abschließend kontrollieren wir noch, ob die gefundenen Werte alle Bedingungen der gestellten Aufgabe erfüllen. Dazu setzen wir die ermittelten Variablenwerte entsprechend ein:

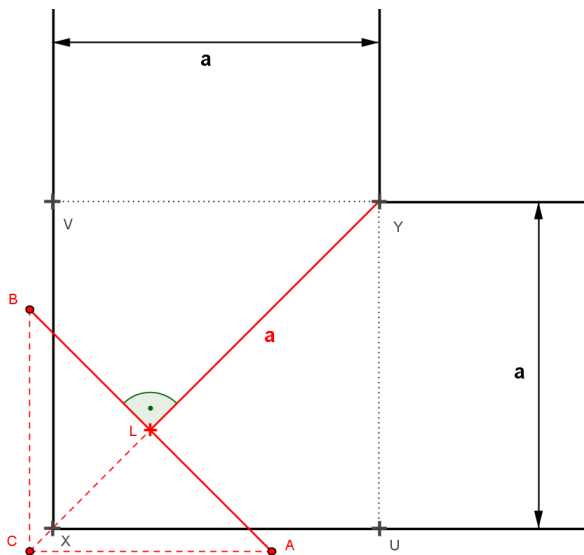
$$\begin{array}{cccc}
 7,5 + 2,5 \neq 3 & 7,5 - 2,5 \neq 10 & 7,5 \cdot 2,5 \neq 5 & 7,5 : 2,5 \neq 18,75 \\
 7,5 + 2,5 = 10 & 7,5 - 2,5 = 5 & 7,5 \cdot 2,5 = 18,75 & 7,5 : 2,5 = 3
 \end{array}$$

Da wir nach dem Einsetzen nur wahre Aussagen erhalten haben, wurde die gefundene Lösung bestätigt.

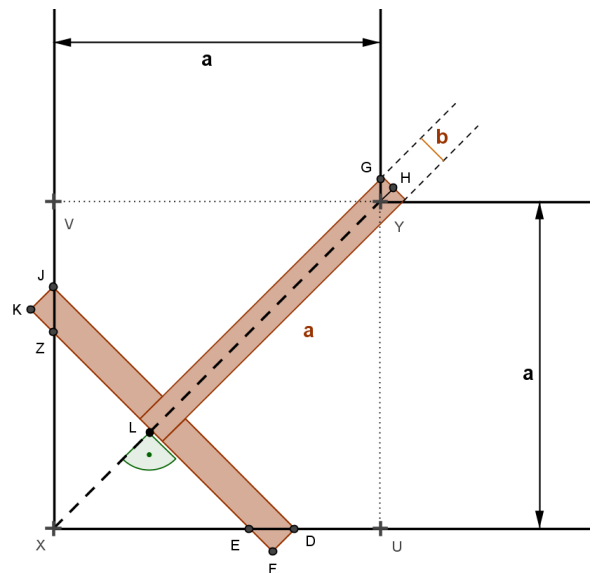
Aufgeschrieben und gelöst von Stefan Knott

Lösung 070923:

Planfigur Aufgabenteil a:



Planfigur Aufgabenteil b:



Skizzen nicht maßstabsgerecht !

Aufgabenteil a:



Zunächst ermitteln wir die maximale Entfernung, die durch die beiden Bretter mit der Länge a überbrückt werden kann. Dazu setzen wir laut Aufgabenstellung voraus, dass die Breite der Bretter unberücksichtigt bleibt und dass diese so wie auf der Abbildung dargestellt, im rechten Winkel zueinander liegen (rote durchgehenden Linien in der linken Planfigur).

Mithin gilt:

$$\overline{AB} = \overline{LY} = a \tag{1}$$

$$\overline{AL} = \overline{BL} = \frac{a}{2} \tag{2}$$

Demnach ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit der Strecke \overline{CL} als Höhe.

Nach dem Höhensatz gilt:

$$(\overline{CL})^2 = \overline{AL} \cdot \overline{BL} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt somit:

$$(\overline{CL})^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \quad | \quad \overline{AL} = \overline{BL} = \frac{a}{2} \tag{4}$$

$$(\overline{CL})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad | \quad \text{radizieren} \tag{5}$$

$$\overline{CL} = \frac{a}{2} \tag{6}$$

Wegen (2) und (6) ist damit aber auch:

$$\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{CL} = \frac{a}{2} \tag{7}$$

Damit beträgt die Länge der maximal überbrückbaren Strecke mit 2 Brettern:

$$a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} a \tag{8}$$

Berechnen wir nun die Entfernung der beiden Grabenecken (Punkte X und Y).

Laut Aufgabenstellung stellt das Viereck $XUYV$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a dar, die Strecke \overline{XY} entspricht genau der Diagonalen dieses Quadrates.

Für die Diagonale d eines Quadrates gilt:

$$d = a \cdot \sqrt{2} \tag{9}$$

In unseren speziellen Fall bedeutet dies:

$$\overline{XY} = a \cdot \sqrt{2} \tag{10}$$

Vergleichen wir nun die maximal überbrückbare Strecke (8) mit der Entfernung der beiden Grabenecken (10):

$$\frac{3}{2} a \qquad a \cdot \sqrt{2} \tag{11}$$

Da die Variable a in jeden der beiden Terme (8) und (10) vorkommt, können diese zur Vereinfachung des Vergleiches noch jeweils durch a dividiert werden:

$$\frac{3}{2} a \quad | : a \qquad a \cdot \sqrt{2} \quad | : a \tag{12}$$

$$\frac{3}{2} \qquad \sqrt{2} \tag{13}$$



Somit genügt es nun die beiden reellen Zahlen $\frac{3}{2}$ und $\sqrt{2}$ miteinander zu vergleichen. Es gilt $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, daher kann der Graben mit Hilfe der beiden Bretter überquert werden.

Aufgabenteil b:

Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich auf die rechte der beiden oben stehenden Planfiguren.

Wie bereits im Aufgabenteil a gezeigt, beträgt die Länge der Strecke \overline{XY} :

$$\overline{XY} = a \cdot \sqrt{2} \quad (14)$$

Weiterhin ist laut den Bedingungen der Aufgabenstellung das Dreieck ZEX rechtwinklig und gleichschenkelig. In einem solchen Dreieck beträgt die Winkelgröße eines Basiswinkels genau 45° , so natürlich auch der Basiswinkel ZEX im Dreieck ZEX .

Die Winkel ZEX und DEF sind Scheitelwinkel, daher haben diese die gleiche Größe. Außerdem handelt es sich bei den verwendeten Bohlen um rechteckige Bretter, daher ist das Dreieck DEF ebenfalls gleichschenkelig und rechtwinklig. Mithin ist die Dreiecksseite \overline{DF} eben dieses Dreieckes die Breite b der verwendeten Bretter, daher gilt:

$$\overline{DF} = \overline{EF} = b \quad (15)$$

Ein weiteres gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck ist das Dreieck XEL , somit ist:

$$\overline{XL} = \overline{EL} \quad (16)$$

Die Strecke \overline{FL} besteht aus den Teilabschnitten \overline{EF} und \overline{EL} , entsprechend den gestellten Voraussetzungen beträgt ihre Länge $\frac{a}{2}$ (siehe auch (2)), demnach ist:

$$\frac{a}{2} = \overline{FL} = \overline{EF} + \overline{EL} \quad (17)$$

Aus (15), (16) und (17) ergibt sich durch Substitution von \overline{EF} und \overline{EL} :

$$\frac{a}{2} = \overline{EF} + \overline{EL} \quad | \overline{EF} = b \quad (18)$$

$$\frac{a}{2} = b + \overline{EL} \quad | \overline{EL} = \overline{XL} \quad (19)$$

$$\frac{a}{2} = b + \overline{XL} \quad | -b \quad (20)$$

$$\overline{XL} = \frac{a}{2} - b \quad (21)$$

Das Dreieck GYH ist ebenfalls gleichschenkelig und rechtwinklig (rechter Winkel bei Punkt H). Außerdem entspricht, wie aus der Planfigur ersichtlich, die Länge der Kathete \overline{GH} der halben Breite eines Brettes. Es ist:

$$\overline{GH} = \overline{YH} = \frac{b}{2} \quad (22)$$

Die Länge der Strecke \overline{LY} ergibt sich nun aus der Differenz der Strecken \overline{LH} und \overline{YH} , wobei ja \overline{LH} der Gesamtlänge eines Brettes a entspricht:

$$\overline{LY} = \overline{LH} - \overline{YH} = a - \overline{YH} \quad (23)$$



\overline{YH} ersetzen wir noch durch den Term (22) und erhalten somit für \overline{LY} :

$$\overline{LY} = a - \overline{YH} \quad | \quad \overline{YH} = \frac{b}{2} \quad (24)$$

$$\overline{LY} = a - \frac{b}{2} \quad (25)$$

Betrachten wir schließlich wieder die Strecke \overline{XY} . Diese setzt sich aus den Teilstrecken \overline{XL} und \overline{LY} zusammen, somit ist:

$$\overline{XY} = \overline{XL} + \overline{LY} \quad (26)$$

Die Substitution der Teilstrecken \overline{XL} und \overline{LY} durch die Terme (21) und (25) ergibt:

$$\overline{XY} = \overline{XL} + \overline{LY} \quad | \quad \overline{XL} = \frac{a}{2} - b \quad (27)$$

$$\overline{XY} = \left(\frac{a}{2} - b\right) + \overline{LY} \quad | \quad \overline{LY} = a - \frac{b}{2} \quad (28)$$

$$\overline{XY} = \left(\frac{a}{2} - b\right) + \left(a - \frac{b}{2}\right) \quad | \quad \text{Klammern auflösen} \quad (29)$$

$$\overline{XY} = \frac{a}{2} - b + a - \frac{b}{2} \quad | \quad \text{zusammenfassen} \quad (30)$$

$$\overline{XY} = \frac{3}{2} \cdot a - \frac{3}{2} \cdot b \quad | \quad \text{ausklammern} \quad (31)$$

$$\overline{XY} = \frac{3}{2} \cdot (a - b) \quad (32)$$

Wir haben nun zwei verschiedene Möglichkeiten erhalten, die Länge der Strecke \overline{XY} zu berechnen, nämlich mit den beiden Gleichungen (14) und (32).



Um schließlich das gesuchte Verhältnis $b : a$ zu ermitteln, setzen wir wie folgt fort:

$$\overline{XY} = a \cdot \sqrt{2} \quad | \text{ siehe (14)} \quad (33)$$

$$\overline{XY} = \frac{3}{2} \cdot (a - b) \quad | \text{ siehe (32), } \overline{XY} = \overline{XY} \quad (34)$$

$$a \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2} \cdot (a - b) \quad | \text{ Bruch erweitern} \quad (35)$$

$$a \cdot \sqrt{2} = \frac{3 \cdot (a - b)}{2} \quad | \cdot \frac{2}{3} \quad (36)$$

$$\frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{2} = a - b \quad | \text{ a ausklammern} \quad (37)$$

$$\frac{2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{2} = a \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right) \quad | : a \quad (38)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} = 1 - \frac{b}{a} \quad | + \frac{b}{a} \quad (39)$$

$$\frac{b}{a} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} = 1 \quad | - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \quad (40)$$

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \quad | \text{ Produkt als Bruch schreiben} \quad (41)$$

$$b : a = 1 - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \quad (42)$$

Das Verhältnis $b : a$ hat den Wert von $1 - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben.

Lösung 070924:

gegeben:

regelmäßiges Oktaeder mit Kugel umschrieben

gesucht:

Verhältnis Oberflächeninhalt Oktaeder A_{Okta} zum Oberflächeninhalt Kugel A_{Kugel} ,

also $A_{Okta} : A_{Kugel}$

Lösung:

Um das Verhältnis der Oberflächeninhalte der beiden Figuren zu bestimmen, müssen diese Flächen zunächst bekannt sein.

Der Oberflächeninhalt einer Kugel A_{Kugel} lässt sich leicht mit der allgemein gültigen Formel

$$A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad (1)$$

bestimmen.

Die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes eines regelmäßigen Oktaeders lautet:

$$A_{Okta} = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \quad (2)$$



Nun müssen wir noch einen Zusammenhang zwischen dem Radius r der Kugel und der Kantenlänge a des Oktaeders herstellen. Halbiert man den Oktaeder genau zwischen den beiden Spitzen, so erhält man als Schnittfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a , die ja auch gleichzeitig der Kantenlänge des vorgegebenen Oktaeders entspricht.

Für die Länge d der Diagonale eines Quadrates in Abhängigkeit seiner Seitenlänge a gilt:

$$d = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \cdot a \tag{3}$$

Der Radius r der umschreibenden Kugel entspricht nun genau der Hälfte der Länge der Diagonalen dieses Schnittflächenquadrates.

Unter Berücksichtigung von (3) ist daher:

$$r = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \tag{4}$$

Wir ersetzen nun in der Gleichung (1) zur Bestimmung des Oberflächeninhaltes der Kugel den Radius r durch den Term (4) und erhalten somit für die Oberfläche der Kugel:

$$A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad | \quad r = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \tag{5}$$

$$A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \right)^2 \quad | \quad \text{Potenz bilden} \tag{6}$$

$$A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot a^2}{4} \right) \quad | \quad \text{kürzen} \tag{7}$$

$$A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a^2}{2} \right) \quad | \quad \text{als Bruch schreiben} \tag{8}$$

$$A_{Kugel} = \frac{4 \cdot \pi \cdot a^2}{2} \quad | \quad \text{kürzen} \tag{9}$$

$$A_{Kugel} = 2 \cdot \pi \cdot a^2 \tag{10}$$

Schlussendlich sind wir nun in der Lage, das gesuchte Verhältnis zu bilden, in dem wir die Gleichungen zur Ermittlung der entsprechenden Flächen (2) und (10) zueinander ins Verhältnis setzen:

$$\frac{A_{Okta}}{A_{Kugel}} = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \pi \cdot a^2} \quad | \quad \text{kürzen} \tag{11}$$

$$\frac{A_{Okta}}{A_{Kugel}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \quad | \quad \text{Verhältnis mit Dezimalpunkt schreiben} \tag{12}$$

$$A_{Okta} : A_{Kugel} = \sqrt{3} : \pi \tag{13}$$

Abschließend kann also gesagt werden:

Der Oberflächeninhalt des regelmäßigen Oktaeders verhält sich zum Oberflächeninhalt der umschreibenden Kugel wie $\sqrt{3}$ zu π .