7. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070931:
Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Aufgabe 070932:
Auf einem (rechtwinkligen) Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel.

Nach welchem Punkt von AB muß diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Aufgabe 070933:
Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben. Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314...979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, daß die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.

Wie lautet diese?

Aufgabe 070934:
Man ermittle alle geordneten Tripel $(a,\, b,\, c)$ natürlicher Zahlen a, b und c, für die $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ gilt.

Zwei Tripel $(a_1,\, b_1,\, c_1)$ und $(a_2,\, b_2,\, c_2)$ heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

Aufgabe 070935:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.

Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

Aufgabe 070936:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3} \quad \text{erfüllen.}$$

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070931:

Es seien z die gesuchten vierstelligen Quadratzahlen und x die Grundziffern der beiden höherwertigen Dezimalstellen, sowie y die Grundziffern der beiden niederwertigen Dezimalstellen.

Laut Aufgabenstellung gilt dann:

$$z = 1000x + 100x + 10y + y \qquad x,\ y \in N; \qquad 1 \leq x \leq 9; \quad 0 \leq y \leq 9; \tag{1}$$

Diese Ausgangsgleichung formen wir zunächst wie folgt um:

$$z = 1000x + 100x + 10y + y \qquad | \texttt{ zusammenfassen} \tag{2}$$

$$z = 1100x + 11y \qquad | \texttt{ 11 ausklammern} \tag{3}$$

$$z = 11 \cdot (100x + y) \tag{4}$$

Durch die Zerlegung der Zahl z in ein Produkt bestehend aus zwei Faktoren (siehe (4)), ist die Teilbarkeit dieser Zahl z durch jeden der beiden Faktoren nachgewiesen. Somit ist die Zahl 11 ein Teiler der Zahl z.

Die Zahl z wurde laut Aufgabenstellung als eine Quadratzahl definiert.

Da 11 eine Primzahl ist, muss aber diese Quadratzahl z nicht nur durch 11 sondern demnach auch durch 11^2 teilbar sein, da natürlich auch im Quadrat einer durch eine Primzahl teilbaren Zahl, diese Primzahl mindestens zweimal als Faktor enthalten ist.

Für die oben stehende Gleichung (4) bedeutet dies nun, das auch der zweite Faktor $(100x + y)$ durch 11 teilbar sein muss, da ja die Zahl z nur in ein Produkt aus 2 Faktoren zerlegt wurde und eben einer dieser Faktoren bereits 11 ist.

Nach den allgemein bekannten Teilbarkeitsregeln ist eine Zahl genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Bereits oben wurde gezeigt, das der zweite Faktor eine dreistellige Zahl in der Form $x0y$ darstellt, mit den bereits eingangs gemachten Einschränkungen für x und y. Die alternierende Quersumme dieses Faktors berechnet sich deshalb nach $x - 0 + y$ bzw., da in unserem nominierten Beispiel die mittlere Stelle des Faktors immer null ist, einfach durch $x + y$. Für die alternierende Quersumme dieses zweiten Faktors sind somit Werte von minimal 1 und maximal 18 möglich. Die einzige durch 11 teilbare Zahl ist in diesem Intervall die 11 selbst. Daher sind für unsere Betrachtungen nur Ziffernkombinationen des zweiten Faktors interessant, deren alternierende Quersumme 11 beträgt.

Dieser konkreten Bedingungen entsprechen nun noch genau 8 mögliche Zahlenkombinationen für den zweiten Faktor, nämlich 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803 und 902.

Nun sollen diese verbliebenen acht Faktoren weiter selektiert werden:

Die niederwertigste Stelle dieser acht noch möglichen Faktoren ist zugleich die Einerstelle unserer gesuchten Quadratzahl(en) z. Wie allgemein bekannt, enden aber Quadratzahlen niemals auf 2, 3, 7 oder 8. Aus diesem Grund streichen wir die Faktoren mit den Einerstellen 2, 3, 7, und 8. Übrig bleiben nun noch die vier restlichen Faktoren 209, 506, 605 und 704.

Nach den allgemeinen Potenzgesetzen gilt bekanntlich $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$, d.h. das Produkt zweier Quadratzahlen ist stets wieder eine Quadratzahl.

Deshalb zerlegen wir nun die vier restlichen Faktoren in ihre Primfaktoren um festzustellen, in welchen der jeweiligen Faktoren sich neben der Primzahl 11 noch weitere gleiche Elemente befinden, aus denen sich dann zwei weitere gleiche Quadratzahlen generieren lassen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 209 &= 19 \cdot 11 \\ 506 &= 23 \cdot 11 \cdot 2 \\ 605 &= 11 \cdot 11 \cdot 5 \\ 704 &= 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Erwartungsgemäß kommt die Primzahl 11 in jeder der Zerlegungen mindestens einmal vor, denn dieses war ja auch weiter oben ein Kriterium zur Auswahl der einzelnen Faktoren (Teilbarkeit durch 11).

Wie aus der oben stehenden Aufstellung ersichtlich, lässt sich nur die Zahl 704 so zerlegen, wie es für unsere Zwecke notwendig und hilfreich ist:

$$704 = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 11 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 11 \cdot 8 \cdot 8 \tag{5}$$

Schlußendlich bedeutet dies aber für uns, das es nur eine einzige vierstellige Quadratzahl z mit den gestellten Bedingungen geben kann. Diese lautet demnach:

$$z = 11 \cdot 704 = 7744 \qquad \textit{(siehe (4))} \tag{6}$$

Mithin gilt:

$$\begin{aligned} z &= 11 \cdot 704 = 11 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 8 = 88 \cdot 88 = 7744 \\ z & = 88^2 = 7744 \end{aligned}$$

Abschließend kann also gesagt werden:

Die Zahl 7744 $\left(= 88^2\right)$ ist daher die einzig mögliche vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen. Nur diese Zahl ist demnach alleinige Lösung der gestellten Aufgabe.

Aufgeschrieben und gelöst von Stefan Knott

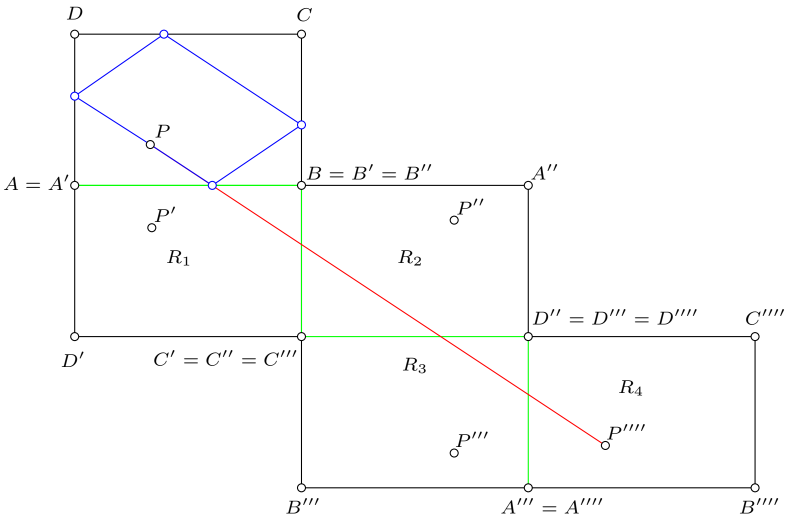
Lösung 070932:

Man muss auf den Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu BD durch P stoßen. Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn P im Dreieck ΔABD liegt. Zum Beweis reicht es aus ein einfaches Bild zu malen.

Man spiegele $ABCD$ an AB. Das dadurch erhaltene neue Rechteck R_1 spiegle man an der Seite, die BC entspricht und erhalte R_2. Alle Spiegelachsen sind in grün eingezeichnet.

R_2 wiederum spiegle man an der Seite von R_2, die CD entspricht. Das Spiegelrechteck sei R_3. Dies spiegelt man an der Seite, die DC entspricht und erhalte R_4.

Sei P'''' der Punkt in R_4, der P entspricht. (Man beobachte, dass R_4 durch Verschiebung von $ABCD$ parallel zur Diagonalen BD entsteht.)



Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass wenn man die Kugel im Punkt P in die Richtung von P'''' stößt, man die Seiten in der gewünschten Reihenfolge trifft und anschließend wieder bei P landet.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 070933:

Zunächst beobachten wir, dass das Ergebnis immer die gleiche Anzahl an Ziffern hat, egal welche Ziffern man streicht.

Damit die Ergebniszahl mit mindestens fünf Neunen beginnt, muss man auf jeden Fall die Zahlen

$$1, 2, ..., 8, 10, 11, ..., 18, 20, 21, ..., 28, 30, ..., 38, 40, 41, ..., 48$$

und die Ziffer 4 von 49 streichen. Das sind $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern.

Es ist nicht möglich, dass das Ergebnis mit sechs Neunen startet, denn dazu müsste man auch noch die Zahlen $50, 51, ..., 58$ und die Ziffer 5 von 59 streichen, das wären dann aber schon $84 + 19 > 100$ Ziffern.

Es ist auch nicht möglich, dass das Ergebnis mit den Ziffern 999998 beginnt, denn dazu müsste man zusätzlich noch $50, 51, ..., 57$ und die 5 von 58 streichen, also insgesamt $84 + 17 > 100$ Ziffern.

Durch zusätzliche Streichung der Zahlen $50, 51, ..., 56$ und der Ziffer 5 von 57 erhält man eine Zahl, die mit 999997 beginnt und hat bisher $84 + 15 = 99$ Ziffern gestrichen.

Streicht man danach auch noch die Ziffer 5 von 58, hat man 100 Ziffern gestrichen und erhält

$$\epsilon := 999997859606162...99100$$

als Ergebnis.

Streicht man die Ziffer 5 von 58 nicht, so bekommt man eine Zahl, die mit 9999975 beginnt, also kleiner als ϵ ist.

Also ist ϵ die größte mögliche Zahl.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 070934:

Diese Aufgabe lässt sich mit Fallunterscheidung lösen.

Es seien $0 < a \leq b \leq c$ drei natürliche Zahlen mit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \qquad (1)$$

1. $a = 1$.
   $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} = 1$ im Widerspruch zu (1). In diesem Fall gibt es keine Lösung.
2. $a \geq 3$

   Wenn $c > 3$ ist, dann ist
   $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$
   im Widerspruch zu (1)

   Wenn $c \leq 3$ ist, dann folgt wegen $3 \leq a \leq b \leq c \leq 3$, dass $a = b = c = 3$ gilt.

   In diesem Fall ist tatsächlich $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

3. $a = 2$
   $$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(c+b) = bc \quad \Leftrightarrow \quad 4 = bc - 2(b+c) + 4 = (b-2)(c-2) \qquad (2)$$
   Wegen $b \geq = a$ muss $b \geq 2$ sein und $b = 2$ ist nicht möglich, weil $4 \neq (2-2)(c-2) = 0$.

   $5 \leq b \leq c$ ist auch nicht möglich, da dann $(b-2)(c-2) \geq (5-2)(5-2) = 9 > 4$ gilt, im Widerspruch zu (2).

   Es kommen also nur die Fälle $b = 3$ und $b = 4$ in Betracht.

   3.1. $b = 3$
   $$(2) \Leftrightarrow 4 = c - 2, \quad \text{also} \quad c = 6. \quad \text{Tatsächlich ist} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$
   3.2. $b = 4$

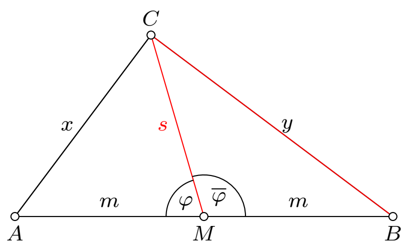
   $(2) \Leftrightarrow 4 = 2(c-2)$, also $c = 4$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Es gibt also genau zehn Lösungstripel: $(3,3,3), (2,3,6)$ und $(2,4,4)$ sowie die Permutationen des 2. und 3. Tripels $(2,6,3)$, $(3,2,6)$, $(3,6,2)$, $(6,2,3)$, $(6,3,2)$ sowie $(4,2,4)$, $(4,4,2)$.

Aufgeschrieben und gelöst von Kitaktus

Lösung 070935:
Sei S der Mittelpunkt der Strecke AB. Mittels Kosinussatz in den Dreiecken ABC und ASC erhalten wir:
$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos(\alpha) = \frac{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2}{2b\frac{c}{2}}$$
und somit
$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - s_c^2 \iff s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$
Lösung von TomTom314

2. Lösung:



Aus dem Schaubild liest man mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\begin{aligned} x^2 &= m^2 + s^2 - 2sm \cdot \cos(\varphi) \\ y^2 &= m^2 + s^2 - 2sm \cdot \cos(\overline{\varphi}) = m^2 + s^2 + 2sm \cdot \cos(\varphi) \\ \text{da} \quad \cos(\overline{\varphi}) &= \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos(\varphi) \end{aligned}$$

also $x^2 + y^2 = 2(m^2 + s^2)$ (Satz des Appolonius).
$\Rightarrow \; 2s^2 = x^2 + y^2 - 2m^2$.
Für ein Dreieck ABC mit $s = s_a$, $x = b$, $y = c$ und $m = \frac{a}{2}$ (vgl. andere Abbildung) wird

$$2s_a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad 4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

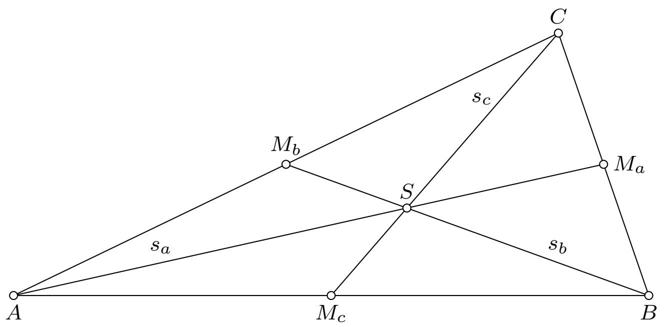
Zusatz: Setzt man darin den Kosinussatz ein, wird

$$4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2b^2 + 2c^2 - \big(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)\big) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

Zusatz: Setzt man erneut den Kosinussatz ein, wird

$$\begin{aligned} 4s_a^2 &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ &= \big(a^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha)\big) + 2bc \cdot \cos(\alpha) = a^2 + 4bc \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Seitenhalbierenden insgesamt die Formeln



$$\begin{aligned} s_a &= \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha)}}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + bc\cos(\alpha)} \\ s_b &= \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos(\beta)}}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + ca\cos(\beta)} \\ s_c &= \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\gamma)}}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab\cos(\gamma)} \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Hyperplot

Lösung 070936:
Zunächst formen wir die linke Seite der vorgegebenen Ungleichung

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3} \tag{1}$$

wie folgt um:

$$\frac{3}{2x-1}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}= \qquad \Big| \ \texttt{Hauptnenner bilden} \tag{2}$$

$$\frac{3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(2x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{2\cdot(2x-1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(2x-1)}= \qquad \Big| \ \texttt{als Differenz schreiben} \tag{3}$$

$$\frac{3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)-(2\cdot(2x-1))}{(2x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}= \qquad \Big| \ \texttt{Klammern auflösen, ausmultiplizieren} \tag{4}$$

$$\frac{3x-\frac{3}{2}-(4x-2)}{2x^2-2x+\frac{1}{2}}= \qquad \Big| \ \texttt{Klammern auflösen} \tag{5}$$

$$\frac{3x-\frac{3}{2}-4x+2}{2x^2-2x+\frac{1}{2}}= \qquad \Big| \ \texttt{ZÃ¤hler zusammenfassen} \tag{6}$$

$$\frac{\frac{1}{2}-x}{2x^2-2x+\frac{1}{2}}= \qquad \Big| \ \texttt{Bruch mit 2 multiplizieren} \tag{7}$$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)}{2\cdot\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)}= \qquad \Big| \ \texttt{Klammern auflösen} \tag{8}$$

$$\frac{1-2x}{4x^2-4x+1}= \qquad \Big| \ \texttt{2. binomische Formel im Nenner anwenden} \tag{9}$$

$$\frac{1-2x}{(2x-1)^2}= \qquad \Big| \ \texttt{Zähler umformen} \tag{10}$$

$$\frac{(-1)\cdot(2x-1)}{(2x-1)^2}= \qquad \Big| \ \texttt{Bruch kürzen} \tag{11}$$

$$\frac{(-1)}{(2x-1)}= \qquad \Big| \ \texttt{negatives Vorzeichen vorziehen} \tag{12}$$

$$-\frac{1}{2x-1} \tag{13}$$

Wir ergänzen den durch die soeben gezeigte Umformung erhalten Term (13) wieder mit der rechten Seite der Ungleichung (1) und erhalten demnach:

$$-\frac{1}{2x-1}>-\frac{1}{3} \tag{14}$$

Nun multiplizieren wir den oben stehenden Ausdruck (14) noch auf beiden Seiten mit -1 und erhalten somit schließlich folgende äquivalente Umformung der vorgegeben Ausgangsungleichung:

$$\frac{1}{2x-1}<\frac{1}{3} \tag{15}$$

Jetzt betrachten wir den Nenner $2x-1$ der linken Seite der Ungleichung (15) näher.

Da die Division durch 0 nicht definiert ist, müssen wir zunächst für x den Wert $\frac{1}{2}$ ausschließen, da $2\cdot\frac{1}{2}-1=0$ ergibt. Es gilt also in jedem Fall $x\neq\frac{1}{2}$.

Für alle anderen reellen Zahlen $x < \frac{1}{2}$ wird der Nenner $2x-1$ und somit auch die linke Seite der Ungleichung (15) negativ. Folglich erfüllen mindestens alle reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x < \frac{1}{2}$ die vorgegebene Ungleichung, da alle Brüche mit negativem Nenner stets kleiner als $\frac{1}{3}$ sind.

Ebenso erfüllen noch alle reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x > 2$ die laut Aufgabenstellung gegebene Ungleichung. In diesen Fällen ist der Term $2x-1$ und somit auch der Nenner der linken Seite der Ungleichung (1) stets > 3. Jeder Stammbruch mit einem Nenner > 3 ist aber ebenfalls kleiner als $\frac{1}{3}$.

Im vorgehenden Text wurden alle möglichen Intervalle von x beleuchtet, in denen die Ungleichung (1) eine wahre Aussage darstellt, daher sind außer den eben gefundenen Lösungen keine weiteren mehr möglich.

Abschließend kann also gesagt werden:

Alle diejenigen reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x < \frac{1}{2}$ oder $x > 2$ erfüllen die in der Aufgabenstellung vorgegebene Ungleichung.

Daher sind genau diese reellen Zahlen x die gesuchte Lösung der gestellten Aufgabe.

Aufgeschrieben und gelöst von Stefan Knott