7. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071011:

Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, daß 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist.

Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: "Ich kann sogar beweisen, daß keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten Ziffer und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens läßt sich auch beweisen, daß unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist."

Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar faßt dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Aufgabe 071012:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC, dessen Seiten folgende Längen (in cm) haben: $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 5$. Die Seite $\overline{AB}$ ist durch einen Punkt T so zu teilen, daß die Umfänge der Dreiecke ΔATC und ΔTBC gleichlang sind.

Der Flächeninhalt (in cm^2) des Dreiecks ΔTBC ist zu berechnen!

Aufgabe 071013:

Ein Mathematiker hat den Schlüssel für das Fach eines Gepäckautomaten verloren. Von der Nummer des Faches wußte er allerdings noch, daß sie eine durch 13 teilbare dreiziffrige Zahl war und daß sich die mittlere Ziffer als arithmetisches Mittel aus den beiden anderen Ziffern ergab. Das Fach konnte schnell ermittelt werden, da nur wenige Zahlen diese Eigenschaften haben.

Geben Sie alle diese Zahlen an!

Aufgabe 071014:

Herr X stellt am 30.05.1967 fest, daß er jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal benutzt, wenn er sein Geburtsdatum in der soeben verwendeten Schreibweise für Terminangaben notiert und sein Alter in Jahren dazu setzt. Außerdem bemerkt er, daß die Anzahl seiner Lebensjahre eine Primzahl ist.

Wann ist Herr X geboren, und wie alt ist er?

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071011:
Die vierstellige Zahl sei z, die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0 < a < 100$).

Dann gilt

$$z = 100a + a = 101a.$$

Das heißt, es gilt $101|z$. Nur für $a = 1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101.

Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101|z$ auch $101^2|z$. Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2 > 10000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müßte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 071012:
Alle Zahlenangaben verstehen sich in cm.

Zunächst kann mit der Umkehrung vom Satz des Pythagoras gezeigt werden, daß es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt:

Es gilt: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = \overline{AB}^2$ und somit auch, daß das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $\sphericalangle ACB$ ist.

Für die Umfänge der Dreiecke ergibt sich jeweils:

(1) $u_{\Delta ATC} = \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT}$

(2) $u_{\Delta BTC} = \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT}$

Bei gleichen Umfängen der Teildreiecke und Zusammensetzung von $\overline{AB}$ aus $\overline{AT}$ und $\overline{BT}$, ergibt sich für $\overline{BT}$:

$$\begin{aligned}
\overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT} &= \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT} \\
\overline{AC} + \overline{AT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\
\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\
\overline{BT} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Der Flächeinhalt eines rechtwinkligen Dreieckes kann auf 2 verschiedene Arten berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \\
\overline{AB} \cdot h &= \overline{BC} \cdot \overline{AC} \\
h &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich für den Flächeninhalt des Teildreiecks ΔTBC mit (1) und (2):

$$\begin{aligned} A_{\Delta TBC} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BT} \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (13 + 5 - 12) \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} \\ &\approx 6,9 \end{aligned}$$

Das Teildreieck ΔTBC hat somit einen Flächeninhalt von ungefähr 6,9cm^2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (0)

Lösung 071013:
Laut Aufgabe gilt:

$$100a + 10b + c = 13n \quad (a,\ b,\ c,\ n \text{ ganz}) \tag{1}$$

$$0 < a \leq 9; \quad 0 < b = \frac{a+c}{2} \leq 9; \quad 0 \leq c \leq 9; \quad n > 0.$$

Daraus folgt:

$$c = 2b - a \tag{2}$$

sowie $99a + 12b = 13n$

$$b = \frac{13n - 99a}{12} = n - 8a + \frac{n - 3a}{12}. \tag{3}$$

Mithin muß $n - 3a = 12m$ (m ganz) gelten, woraus man

$$n = 12m + 3a \tag{4}$$

erhält. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$b = 13m - 5a. \tag{5}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$c = 26m - 11a \tag{6}$$

und aus (5) und (6) $16a + b + c = 39m$, woraus man unter Berücksichtigung von (1) $17 \leq 39m \leq 162$ erhält. Daraus folgt

$$1 \leq m \leq 4. \tag{7}$$

Da $m > 0$ und ganzzahlig sein muß, ergibt sich aus (6) und (1)

$$11a \leq 26m \leq 11a + 9. \tag{8}$$

Mit Hilfe von (7) und (8) ermittelt man aus (5) und (2) als einzig mögliche Zahlen 234, 468, 741 und 975, da jeder Wert von m in (7) genau einen Wert für a in (8) liefert. Da jede dieser vier Zahlen allen Bedingungen der Aufgabe genügt, ist sie auch Lösung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 071014:

Es bezeichne $ab.cd.efgh$ das Geburtsdatum und ik das Alter von Herrn X. Es seien also

a und b die Ziffern für den Tag,
c und d die Ziffern für den Monat,
e, f, g und h die Ziffern für das Jahr und
i und k die Ziffern für das Alter.

Dann muß gelten:

$e = 1$, und f kann nur 9 oder 8 sein, da die Anzahl der Lebensjahre von Herrn X zweistellig sein muß und er demnach nach 1799 geboren wurde.
$c = 0$, da es nur 12 Monate gibt und die 1 bereits vergeben ist.
$a = 2$, da ein Monat höchstens 31 Tage haben kann, die 0 und die 1 vergeben sind, und somit 30 und 31 auch nicht in Frage kommen.

Fall 1: Sei $f = 9$
Dann muß gelten

A) $10g + h + 10i + k = 66$,
falls Herr X nach dem 30.5. Geburtstag hat,

B) $10g + h + 10i + k = 67$ andernfalls.

Aus A) folgt, daß entweder

a) $g + i = 6$ und $h + k = 6$ oder
b) $g + i = 5$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus B) folgt, daß entweder

c) $g + i = 6$ und $h + k = 7$ oder
d) $g + i = 5$ und $h + k = 17$ gilt.

Aus den noch verbliebenen Ziffern ist keins der vier Gleichungspaare realisierbar. Die Annahme $f = 9$ ist falsch.

Fall 2: Sei $f = 8$.
Dann gilt, ähnlich wie oben,

C) $10g + h + 10i + k = 166$ oder
D) $10g + h + 10i + k = 167$.

Aus C) folgt, daß entweder

e) $g + i = 16$ und $h + k = 6$ oder
f) $g + i = 15$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus D) folgt, daß entweder

g) $g + i = 16$ und $h + k = 7$ oder
h) $g + i = 15$ und $h + k = 17$ gilt.

Mit den noch vorhandenen Ziffern ist nur g) realisierbar.Folgende vier Verteilungen sind möglich:

$g = 9$ und $i = 7$ und $h = 4$ und $k = 3$
$g = 7$ und $i = 9$ $h = 3$ und $k = 4$.

Das Alter von Herrn X kann damit 73,74, 93 oder 94 Jahre sein. Von diesen Zahlen ist nur 73 Primzahl. Es ergibt sich damit folgende Verteilung:

$$f = 8, \quad i = 7, \quad k = 3, \quad g = 9 \quad \text{und} \quad h = 4.$$

Für b und d stehen nur noch die Ziffern 5 und 6 zur Verfügung. Aus g) folgt, weil es aus D) hervorgegangen ist, daß Herr X vor dem 30.5. Geburtstag hatte. Damit ist $d = 5$ und $b = 6$.

Herr X wurde am 26.05.1894 geboren und ist 73 Jahre alt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag