7. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071031:

Beweisen Sie folgende Aussage:

Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

Aufgabe 071032:

Es ist zu beweisen, daß $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ist!

Aufgabe 071033:

Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika:

> "Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten. Ich weiß zwar noch, daß alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauten."
>
> "Welche Maßzahlen meintest du, als du 'alle Maßzahlen' sagtest?"
>
> "Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide."
>
> "Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren z.B. die Längen in cm der Oberflächeninhalt in cm^2 und das Volumen in cm^3 angegeben?"
>
> "Ja so war es."

Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?

Aufgabe 071034:

Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i ($i = 1, 2, 3$), die die Gleichung $\sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$ erfüllen und für die außerdem $1 \leqslant a_i \leqslant 10$ gilt!

Aufgabe 071035:

Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?

Aufgabe 071036:

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm!

Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071031:

Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ und o.B.d.A. die Winkelhalbierende durch B, welche die Seite AC im Punkt W_B schneide. O.B.d.A. betrachten wir das Teildreieck $\triangle ABW_B$.

Dessen Innenwinkel bei W_B sei mit ϕ bezeichnet; die Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$ bei A und B, wie üblich, mit α und β. Dann ist, da BW_B den Innenwinkel β halbiert, also $\angle W_BBA = \frac{\beta}{2}$, und aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck ABW_B schließlich $\phi = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2}$.

Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist

$$\alpha < 180° - \beta \qquad \text{also} \qquad \phi > 180° - (180° - \beta) - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Da in einem Dreieck dem größeren Innenwinkel auch immer die größere Seite gegenüberliegt, ist $|AB| > |AW_B|$, was zu beweisen war.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071032:

Es ist $\log_a b$ diejenige reelle Zahl x, für die $a^x = b$ gilt.

Analog ist $\log_b c$ diejenige reelle Zahl y, für die $b^y = c$ gilt.

Dann ist $c = b^y = (a^x)^y = a^{x\cdot y}$, also $\log_a c = x \cdot y = \log_a b \cdot \log_b c$, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071033:

Wir gehen von einer geraden quadratischen Pyramide aus, da sonst die Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist.

Sei $a \neq 0$ die Maßzahl der Kantenlänge der Grundfläche und $h \neq 0$ die der Höhe der Pyramide. Dann ist deren Volumen V gleich $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und ihr Oberflächeninhalt

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Aus $V = A$ folgt damit $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$ bzw. nach Division durch $\frac{a}{3}$ und Umsortieren $a \cdot (h-3) = 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$. Quadrieren liefert

$$a^2 \cdot (h-3)^2 = 9 \cdot (4h^2 + a^2) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 \cdot (h^2 - 6h + 9) = 36h^2 + 9a^2$$

was nach Subtraktion von $9a^2$ und Division durch h die Gleichung $a^2 \cdot h - 6a^2 = 36h$, also $h \cdot (a^2 - 36) = 6a^2$ und damit $h = \frac{6a^2}{a^2-36}$ liefert.

Da h eine natürliche Zahl ist, muss der Nenner $a^2 - 36$ Teiler des Zählers $6a^2$ sein. Also muss auch $a^2 - 36$ ein Teiler von $6a^2 - 6 \cdot (a^2 - 36) = 216$ sein.

Für jeden Teiler t von 216, der durch 2, aber nicht 4 teilbar ist, wäre $t + 36$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar, also keine Quadratzahl. Analog können wir auch die durch drei, aber nicht 9 teilbaren Teiler t von 216 ausschließen, da auch dann $t + 36$ nicht die Quadratzahl a^2 ergeben kann.

Es verbleiben die Teiler 1, 9, 27, 4, 36, 108, 8, 72 und 216. Von diesen erfüllt nur $t = 108$, dass $t + 36$ eine Quadratzahl ergibt, nämlich $t + 36 = 144 = 12^2 = a^2$. Also ist

$$a = 12 \qquad \text{und} \qquad h = \frac{6a^2}{a^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12^2}{12^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12}{12 - 3} = 8$$

Tatsächlich ist für diese Werte der Länge der Grundseite $a = 12$ und Höhe der Pyramide $h = 8$ das Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 384$ und die Oberfläche

$$A = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2} = 144 + 12 \cdot \sqrt{256 + 144} = 144 + 12 \cdot 20 = 384 = V$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071034:

Die Gleichung ist offenbar äquivalent zu $2(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = a_3^2$.

Da 2 eine Primzahl ist, folgt aus $2|a_3^2$ direkt $2|a_3$, sodass die rechte Seite der Gleichung durch 4 teilbar ist. Also muss auch $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)$ gerade sein, und damit mindestens einer dieser beiden Faktoren. Da nur beide zugleich (oder keiner von beiden) gerade sein können, ist die rechte Seite der Gleichung also sogar durch 8 teilbar, sodass aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung a_3 zumindest durch 4 teilbar sein muss.

Es verbleiben also zwei Fälle: $a_3 = 4$ und $a_3 = 8$.

1. Fall: $a_3 = 4$.

   Dann ist also $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 8$ und, da beide Faktoren gerade sind, wegen $a_1 + a_2 > 0$ auch $a_1 - a_2 > 0$ und schließlich $a_1 + a_2 > a_1 - a_2$, also $a_1 + a_2 = 4$ sowie $a_1 - a_2 = 2$. Es ergibt sich als Lösungstripel $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 4)$, was durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auch bestätigt wird.

2. Fall: $a_3 = 8$.

   Dann ist $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 32$. Nun ergeben sich folgende mögliche Zerlegungen in zwei positive und gerade Faktoren:

   a) $a_1 + a_2 = 16$ und $a_1 - a_2 = 2$, was auf $a_1 = 9$ und $a_2 = 7$ führt.
   b) $a_1 + a_2 = 8$ und $a_1 - a_2 = 4$, was dan auf $a_1 = 6$ und $a_2 = 2$ führt.

   Beide mögliche Lösungen werden durch die Probe bestätigt.

Zusammenfassung: Im zu betrachtenden Bereich gibt es genau drei Lösungstripel, nämlich (3,1,4), (6,2,8) und (9,7,8).

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071035:

Die Diskriminante des Polynoms $x^2 + ax + a - 2$ ist $a^2 - 4(a - 2) = (a - 2)^2 + 4$ ist für jedes reelle a positiv, also gibt es auch für jedes reelle a genau zwei Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ und diese sind keine doppelten Nullstellen.

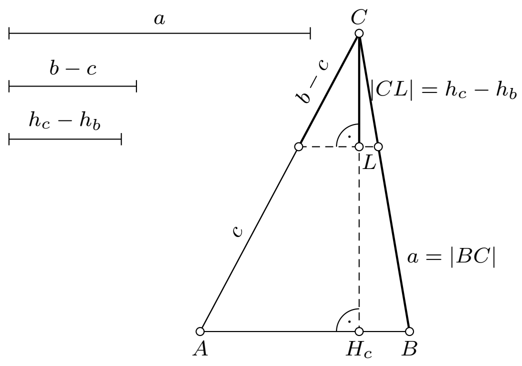
Nach Vieta gilt $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1x_2 = a - 2$. Somit ist

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - a + 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

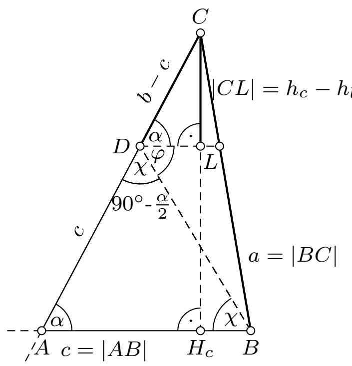
Die Summe der Quadrate der Lösungen wird daher genau dann minimal, wenn $a = \frac{1}{2}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 071036:



Planfigur und Konstruktion



Trägt man auf der Seite $b = |AC|$ die Strecke c ab, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b - c = |DC|$.

Legt man durch D eine Parallele zu $|AB|$ und fällt von C das Lot auf die Parallele, Lotfußpunkt sei L, dann erhält man eine Strecke $|CL| = h_c - h_b$, die gleich der gegebenen Strecke $h_c - h_b$ ist.

Beweis:

Nach der Strahlensatzfigur mit Scheitelpunkt C ist

$$\frac{|CL|}{h_c} = \frac{b-c}{b} = 1 - \frac{c}{b} \;\Leftrightarrow\; |CL| = h_c - \frac{ch_c}{b} = h_c - \frac{bh_b}{b} = h_c - h_b$$

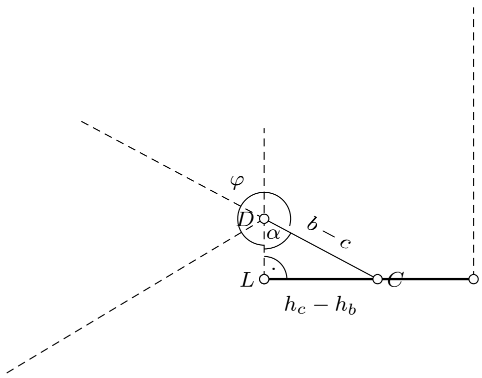
da nach der Flächenformel $2F = ah_a = bh_b = ch_c$ gilt.

Damit ist mit DLC ein rechtwinkliges Dreieck gegeben, mit der Hypotenuse $b-c$ und einer Kathete h_c-h_b.

Mit ABD ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze A und den Schenkeln c und entsprechend dem Basiswinkel $\chi = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ gegebenen.

Für den Konstruktionswinkel φ bei D ist $\varphi = 180° - \alpha - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, also $\varphi = \chi$. Die Ecke B liegt also auf einer Geraden, die den Supplementwinkel $\sphericalangle ADL$ von $\alpha = \sphericalangle CDL$ halbiert sowie auf einem Kreis $\odot(C, a)$ beschrieben um C vom Radius a.

Die Ecke A liegt auf einer Parallelen zu $|DK|$ durch B sowie auf derjenigen Geraden durch $|CD|$.



Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

(1) Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks DLC.

(1a) Lege durch $h_c - h_b = |CL|$ die Punkte C und L fest.

(1b) Errichte eine Senkrechte zu $|CL|$ in L.

Beschreibe einen Kreis $\odot(C, b - c)$ um C vom Radius $b - c$. Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten ist der Punkt D.

(2) Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks ABD.

(2a) Lege eine Gerade durch $|CD|$ und halbiere den Supplementwinkel von $\alpha = \sphericalangle LDC$, um den Winkel φ zu erhalten.

(2b) Lege eine Gerade durch D so, dass sie mit $|LD|$ den Konstruktionswinkel $\varphi = 90° - \frac{\alpha}{2}$ einschließt.

Beschreibe einen Kreis $\odot(C, a)$ um C vom Radius a. Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden ist die Ecke B.

(2c) Lege eine Parallele zu $|DL|$ durch B.

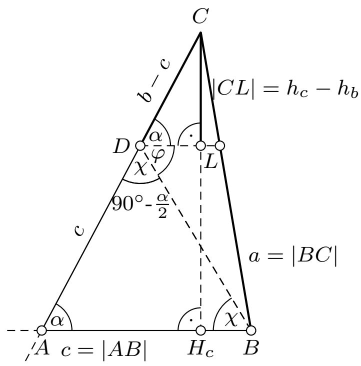
Schnittpunkt der Parallelen mit derjenigen Geraden durch $|CD|$ ist die Ecke A.

Bedingungen für die Konstruktion

Man entliest der Konstruktionsskizze, dass $b - c > h_c - h_b$ sein muss, da $b - c$ Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DLC ist.

Ferner muss $a > b - c$ sein, da der Punkt B sonst innerhalb des Dreiecks DLC liegt.

Berechnung



Zusatz: Berechnung der fehlenden Seitenlängen und Innenwinkel aus den gegebenen Größen $a, b-c, h_c-h_b$.

a) $\sin(\alpha) = \dfrac{h_c - h_b}{b-c} \;\Rightarrow\; \alpha$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$. Mit $x := b-c$ und $\cos(\alpha) =: g$ ergibt sich mit $a^2 = (x+c)^2 + c^2 - 2(x+c)c \cdot g$ eine Bestimmungsgleichung für c.

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$c_{1/2} = \frac{\pm\sqrt{(g-1)[(g+1)x^2 - 2a^2]} - (g-1)x}{2(g-1)} \;\Rightarrow\; c$$

als positive Lösung.

c) $\dfrac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c}{a} \;\Rightarrow\; \gamma$

d) $\beta = 180° - \alpha - \gamma$

e) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \;\Rightarrow\; b$

Aufgeschrieben und gelöst von Hyperplot