7. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071041:

Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind!

Aufgabe 071042:

Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, daß er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.

Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h < \frac{a}{2}$, $h = \frac{a}{2}$ und $h > \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

Aufgabe 071043:

Beweisen Sie folgende Behauptung!

Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.

Aufgabe 071044:

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel! Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

Aufgabe 071045:

Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1, W_2, W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände. W_1, W_2, W_3 liegen nicht auf derselben Geraden. Die Werkhallen sind miteinander durch drei geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken $\overline{W_1W_2}$, $\overline{W_2W_3}$ und $\overline{W_3W_1}$) verbunden. Für die Strecken gilt: $\overline{W_2W_3} < \overline{W_3W_1} < \overline{W_1W_2}$. Die Bahnstation hat von den drei Straßen gleichen Abstand. Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken $\overline{BW_1}, \overline{BW_2}$ und $\overline{BW_3}$) mit den drei Werkhallen verbunden.

Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.

Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

Aufgabe 071046:

Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\,.$$

7. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071041:

Mit $a^{100}-2$ und $a^{101}-69$ ist auch

$$\left(a^{101}-69\right)-\left(a^{100}-2\right)\cdot a-73=a^{101}-69-a^{101}+2a-73=2a-4=2(a-2)$$

durch 73 teilbar, sodass a bei der Teilung durch 73 den Rest 2 lässt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

2. Lösungsweg:

Wenn a eine solche natürliche Zahl ist, dass $a^{100}-2$ und $a^{101}-69$ durch 73 teilbar sind, dann folgt einerseits die Teilbarkeit von $a^{101}-2a$ durch 73, also die Existenz einer ganzen Zahl r mit

$$a^{101}-2a=73r$$

und andererseits die Existenz einer ganzen Zahl s mit

$$a^{101}-69=73s$$

Daraus folgt $2a-69=73(s-r)$, also die Existenz einer ganzen Zahl t mit

$$2a=69+73t \rightarrow 2a=69+73+73(t-1) \rightarrow 2a=142+73(t-1)$$

Da $2a-69$ ungerade ist, muss auch t eine ungerade Zahl sein. Dann ist $t-1$ gerade, also von der Form $t-1=2n$, n ganz, und es gilt

$$2a=142+2n\cdot 73 \qquad \text{also} \qquad a=71+73n$$

Als Rest, den a bei Division durch 73 lässt, kommt demnach höchstens die Zahl 71 in Frage.
Zusätzlich wird noch gezeigt, dass 71 als Rest tatsächlich möglich ist, d.h., dass mindestens eine Zahl a mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften existiert. Dies kann folgendermaßen geschehen. Es ist:

$$\begin{aligned} 71 &\equiv -2 \pmod{73} \\ 71^9 &\equiv (-2)^9=-512^2=-7\cdot 73-1\equiv -1 \pmod{73} \\ 71^{99} &\equiv 2 \pmod{73} \\ 71^{100} &\equiv -4\equiv 69 \pmod{73} \end{aligned}$$

Wenn allgemeiner $a\equiv 71 \pmod{73}$ ist, also $a\equiv -2 \pmod{73}$ ist, gilt

$$a^{100}\equiv 2 \pmod{73} \qquad \text{und} \qquad a^{101}\equiv -4 \pmod{73}$$

Folglich ist

$$a^{100} - 2 \equiv 2 - 2 = 0 \pmod{73} \qquad \text{und} \qquad a^{101} - 69 \equiv -4 - (-4) = 0 \pmod{73}$$

Also genügen genau alle natürlichen Zahlen $a \equiv -2 \pmod{73}$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 071042:

V_1 sei das Volumen des Behälters für die erste der oben angegebenen Lagen der Pyramide. Die Grundfläche der Pyramide fällt dann mit einer Seitenfläche des umschließenden Quaders zusammen, die Höhe der Pyramide ist gleich der Höhe des Behälters. Es gilt

$$V_1 = a^2 h \tag{1}$$

V_2 sei das Volumen des Behälters in der zweiten Lage der Pyramide. Wie berechnen V_2 für die beiden möglichen Fälle $h \geq \frac{a}{2}$ und $h < \frac{a}{2}$.

1. Fall: Es sei $h \geq \frac{a}{2}$.

   Die Seitenfläche ABS der Pyramide liege in einer Seitenfläche des Behälters, die Kante AB sei gemeinsame Kanten von Pyramide und Behälter.

   Wie legen eine Ebene durch die Pyramidenspitze S, die Mitte M von AB und die Mitte M' der Gegenseite zu AQB im Basisquadrat der Pyramide.

   Die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide ist (wegen der Kongruenz der Seitenflächen der Pyramide) das gleichschenklige Dreieck SMM' mit $SM = SM' = s$; $MM' = a$,

   Die Höhe SP dieses Dreiecks ist die Pyramidenhöhe h, die Seiten SM, SM' sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide.

   Wegen $h \geq \frac{a}{2}$ gilt $\sphericalangle MSP \leq 45°$, also $\sphericalangle MSM' \leq 90°$. Hieraus folgt $MQ \leq MS = s$, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S ist. Sei $x = M'Q$, dann gilt:

   $$V_2 = a \cdot s \cdot x \tag{2}$$

   Die Dreiecke MQM' und MSP sind (wegen der Gleichheit der Winkel) ähnlich, also $x : a = h : s$ oder

   $$x = \frac{ah}{s} \tag{3}$$

   Einsetzen dieser Beziehung in (2) ergibt

   $$V_2 = a^2 h = V_1$$

   d.h., die Behältervolumina sind für $h \geq \frac{a}{2}$ in beiden Lagen gleich.

2. Fall: Es sei $h < \frac{a}{2}$.

   Die Schnittfigur ist jetzt ein bei S stumpfwinklig gleichschenkliges Dreieck. Wie im Fall 1 fällen wir von M' der Lot $M'Q$ auf die Verbindungsstrecke der Punkt M und S.

   Wegen $\sphericalangle MSM' > 90°$ ist $s_1 = MQYMS = s$. Für der Volumen des umschließenden Quaders gilt (mit $x = M'Q$):

   $$V_2 = as_1 x$$

Wie im Fall 1 ist $x = \frac{ah}{s}$; demzufolge

$$V_2 = a^2 h \cdot \frac{s_1}{s}$$

und wegen $\frac{s_1}{s} > 1$, gilt also $V_2 > V1$.

Das Volumen ist kleiner, wenn die Grundfläche der Pyramide mit einer Seitenfläche des Behälters zusammenfällt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 071043:

Es ist zu zeigen, dass die Diskriminante des Polynoms $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ negativ ist, also dass

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$$

gilt.

Nach Kosinussatz gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ für den Winkel α zwischen den Dreiecksseiten b, c. Somit ist

$$\begin{aligned}(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 &= (2bc\cos\alpha)^2 - 4b^2c^2 \\ &= 4b^2c^2(\cos^2\alpha - 1) \\ &= -4b^2c^2\sin^2\alpha \\ &< 0.\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 071044:

Wir bezeichnen die Winkel und Seiten des Dreiecks auf kanonische Weise, sodass die Hypotenuse c, die Katheten a und b sowie die ihnen gegenüberliegenden Innenwinkel mit α bzw. β lautet.

Nach der Definition der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck gilt $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und analog

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

also

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{a+b}{c}$$

bzw.

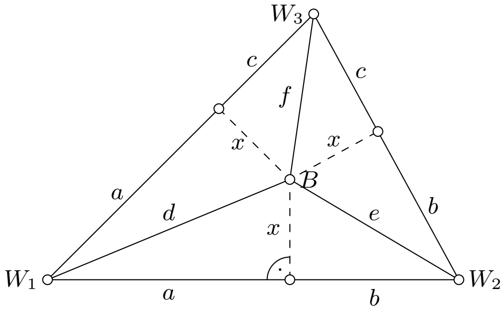
$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}ab = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2ab) \\ &= \frac{1}{4} \cdot ((a+b)^2 - (a^2 + b^2)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left((\sin\alpha + \sin\beta)^2 c^2 - c^2\right) \\ &= \frac{c^2}{4} \cdot ((\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 1)\end{aligned}$$

Für feste Hypotenusenlänge c kann sich, damit das Dreieck bei C einen rechten Winkel besitzt, nach dem Satz des Thales der Punkt C nur auf einem Kreis, der die Hypotenuse als Durchmesser hat, bewegen.

Damit ist die Höhe auf c nach unten durch 0 und nach oben durch den Umkreisradius, also $\frac{c}{2}$ beschränkt, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks im Intervall $\left(0; \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2}\right]$ aus Stetigkeitsgründen jeden Wert annehmen kann, sodass $0 < (\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 1 \leq 1$ gilt und damit die Sinussumme also genau die Werte aus dem Intervall $(1; \sqrt{2}]$ annimmt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071045:



Der geometrische Ort aller Punkte, die von den zwei Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand haben, ist dessen Winkelhalbierende. Infolgedessen ist B der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle W_1W_2W_3$ (somit der Inkreismittelpunkt).

Der Radius des Inkreises sei x, die in der Abbildung eingezeichneten Berührungsradien bestimmen Abschnitte auf den Dreiecksseiten, die wegen der Kongruenz der Teildreiecke (zwei Seiten und zwei Winkel stimmen überein) paarweise die gleiche Länge haben.

Die in der Aufgabenstellung gegebene Relation zwischen den Seitenlängen des $\triangle W_1W_2W_3$ bedeutet

$$a + b > a + c > b + c \qquad \text{also} \qquad a > b > c$$

Jede zulässige Fahrtroute führt von B zu einer Werkhalle und hat dort zwei mögliche Fortsetzungen. Das ergibt insgesamt sechs Routen. Drei von ihnen unterscheiden sich nur in der Orientierung von der anderen drei:

I: $B - W_1 - W_2 - W_3 - B$ (gleiche Länge: $B - W_3 - W_2 - W_1 - B$)

II: $B - W_2 - W_1 - W_3 - B$ (gleiche Länge: $B - W_3 - W_1 - W_2 - B$)

III: $B - W_1 - W_3 - W_2 - B$ (gleiche Länge: $B - W_2 - W_3 - W_1 - B$)

Die entsprechenden Längen sind:

I: $d + a + b + b + c + f$

II: $e + b + a + a + c + f$

III: $d + a + c + c + b + e$

Nun werden die Längen der Routen I und II verglichen. Das ist gleichbedeutend mit dem Vergleich:

I	II
$b + d$	$a + e$
$b + \sqrt{a^2 + x^2}$	$a + \sqrt{b^2 + x^2}$
$b^2 + 2b\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2$	$a^2 + 2a\sqrt{b^2 + x^2} + b^2 + c^2$
$b\sqrt{a^2 + x^2}$	$a\sqrt{b^2 + x^2}$
$b^2a^2 + b^2x^2$	$a^2b^2 + a^2x^2$
b^2x^2	a^2x^2
b^2	a^2
b	a

Da auf beiden Seiten nur positive Werte vorkommen, bedeuten Quadrieren und Wurzelziehen äquivalente Umformungen des Vergleichs. Es kann also aus $b < a$ geschlossen werden, dass der Weg I kürzer ist als der Weg II.

Analog zeigt man, dass III kürzer als I ist. Somit sind die beiden Varianten von III die gesuchten Routen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (36)

Lösung 071046:

Offensichtlich ist $x \geq \sqrt{x}$, damit $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ definiert ist. Dies ist äquivalent zu $x \geq 1$ oder $x = 0$, wobei aber letzteres ausgeschlossen ist, da man sonst wegen $x + \sqrt{x} = 0$ einen Nullnenner im Bruch unter der Wurzel auf der rechten Seite erhalten würde. Sei also ab sofort $x \geq 1$.

Durch Multiplikation mit $\sqrt{x + \sqrt{x}} \neq 0$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

bzw.

$$x - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Nach Division durch $\sqrt{x} \neq 0$ und umsortieren erhält man $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x - 1}$. Quadriert man diese Gleichung, was wegen $x \geq 1$ und also $\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ eine Äquivalenzumformung ist, führt dies auf $x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1$ bzw. $\sqrt{x} = \frac{5}{4}$, also $x = \frac{25}{16}$.

Tatsächlich bestätigt die (mathematisch nicht notwendige) Probe (da es sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen gehandelt hat), dass $x = \frac{25}{16}$ Lösung der Ausgangsgleichung ist. Diese ist auch, wie gezeigt, die einzige Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift

(36) Zeitschrift "Mathematik in der Schule", Verlag Volk und Wissen 1968