7. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1967/1968

Aufgaben und Lösungen

7. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 071241:

Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1 + ax_2 + x_3 = b \quad (1)$$
$$x_2 + ax_3 + x_4 = b \quad (2)$$
$$x_3 + ax_4 + x_1 = b \quad (3)$$
$$x_4 + ax_1 + x_2 = b \quad (4)$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

Aufgabe 071242:

Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus den Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus?

Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

Aufgabe 071243:

Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

Aufgabe 071244:

Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.

Man beweise, daß es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.

Aufgabe 071245:

Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Aufgabe 071246:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleich lang sind.

7. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 071241:
Fallunterscheidung:

1.: $a = 0$. Dann ist das Gleichungssystem äquivalent zu $x_1+x_3 = b = x_2+x_4$, sodass alle Lösungsquadrupel die Form $(s, t, b-s, b-t)$ mit zwei reellen Parametern s und t besitzen. Einsetzen bestätigt, dass das alles auch Lösungen sind.

2.: $a \neq 0$. Dann führt das Gleichsetzen von Gleichung (1) mit (3) auf $ax_2 = ax_4$ bzw. $x_2 = x_4$. Analog erhält man mit Gleichungen (2) und (4) die Identität $x_1 = x_3$. Einsetzen liefert nun $2x_1 + ax_2 = b = 2x_2 + ax_1$, also $(2-a)x_1 = (2-a)x_2$.

2.1: $a \neq 2$. Dann folgt $x_1 = x_2$, also sind alle vier Variablen gleich und man erhält $(2 + a)x_1 = b$.

2.1.1: $a \neq -2$. Dann sind genau die Quadrupel $\left(\frac{b}{2+a}, \frac{b}{2+a}, \frac{b}{2+a}, \frac{b}{2+a}\right)$ Lösungen des Gleichungssystems, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt.

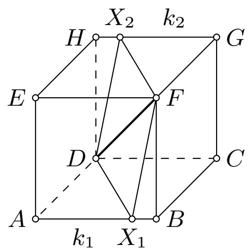
2.1.2: $a = -2$ und $b = 0$. Dann sind die Lösungsquadrupel gegeben durch (t, t, t, t), wobei t die reellen Zahlen durchläuft. Auch hier bestätigt die Probe das Ergebnis.

2.1.3: $a = -2$ und $b \neq 0$. Dann gibt es wegen $(2 + a)x_1 = (2 - 2)x_1 = 0 \neq b$ keine Lösung.

2.2: $a = 2$. Dann ist $2x_1+2x_2 = b$, sodass man genau alle Lösungstripel erhält durch $\left(t, \frac{b}{2} - t, t, \frac{b}{2} - t\right)$, wobei auch hier der Parameter t die reellen Zahlen durchläuft, und man durch Einsetzen bestätigt, dass dies alles Lösungen sind.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071242:
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir alle Ebenen, die die Körperdiagonale enthalten (siehe Abbildung).



Sei ϵ eine dieser Ebenen. ϵ enthält außer D und F noch (mindestens einen auf einer Würfelkante k_1 gelegenen von D und F verschiedenen) Punkt X_1.

Geht k_1 von F aus, dann verläuft ϵ sowohl durch diese Würfelkante als auch durch die den Punkt D enthaltende zu k_1 parallele Kante k_2. Entsprechend den drei von F ausgehenden Kanten gibt es drei derartige Lagen der Ebene ϵ und die dabei entstehenden Schnittflächen F_ϵ sind kongruente Rechtecke mit dem Flächeninhalt

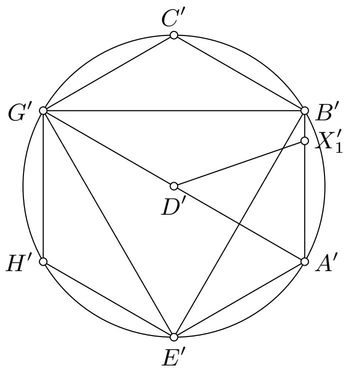
$$|F_\epsilon| = a \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2}a^2$$

Geht k_1 nicht von D oder F aus, d.h. bezeichnet k_1 einer der sechs Kanten AB, BC, CG, GH, HE oder EA, dann gibt es unter diesen sechs Kanten eine zu k_1 parallele Kante k_2. Da ϵ k_1 schneidet, so schneidet die Ebene ϵ auch k_2 in einem Punkt X_2, wobei X_1FX_2D ein Parallelogramm mit der Diagonalen DF ist.

X_1FX_2D ist die Schnittfläche von ϵ mit einem Würfel. Durch entsprechende Wahl von X_1 (und damit auch von X_2) auf einem der beiden anderen Paare paralleler Kanten entsteht eine zu X_1FX_2D kongruente Schnittfläche.

Da die Diagonale DF die Schnittfläche in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, wird der Flächeninhalt der Schnittfläche genau dann ein Minimum, wenn die Höhe l zur Grundseite DF der zugehörigen Dreiecke eine minimale Länge hat.

Sei X_1 aus AB gelegen. Projiziert man den Würfel parallel zu FD auf eine zu FD senkrechte Ebenem so verzerren sich die Strecken l, AC, CH, HA, BG, GE und EB nicht, und werden die Bilder der Originalpunkte durch einen Strich gekennzeichnet, so bilden A', B', C', G', H', E' die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit dem Mittelpunkt D'.



Wegen $l = X_1'D'$ hat l offenbar genau dann den kleinsten Wert, wenn der Punkt X_1' der Strecke $A'B'$ diese Strecke halbiert, also $X_1'D'$ Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle A'B'D'$ ist. Dann gilt $|l| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ und für die Maßzahl der entsprechenden Schnittfläche

$$|F_e| = a\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

Wegen $2a^2 > \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ ist diese Schnittfläche tatsächlich minimal.
Entsprechend der Lage von X_1, X_2 auf einem der drei ober betrachteten Paare paralleler Kanten gibt es drei Lagen von ϵ, in denen diese minimale Schnittfläche ausgeschnitten wird.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (36)

<u>Lösung 071243:</u>
Da n ungerade ist, gilt für alle reellen x die Identität $(-x)^n = -x^n$. Insbesondere erhält man also durch Einsetzen von $-x$ in die Funktionalgleichung eine zweite:

$$a \cdot f(-x^n) + f(x^n) = -bx$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $(a+1)\cdot(f(x^n)+f(-x^n))=0$, also wegen $a\neq -1$ schließlich $f(-x^n)=-f(x^n)$. Setzt man dies wiederum in die Ausgangs-Funktionalgleichung ein, erhält man $(a-1)\cdot f(x^n)=bx$ bzw. nach Division durch $a-1\neq 0$ und der passenden Substitution

$$f(x)=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{x}$$

Man überprüft schnell, dass diese Funktion tatsächlich auch die Funktionalgleichung erfüllt, da

$$f(x^n)=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{x^n}=\frac{b}{a-1}\cdot x \qquad \text{und}$$
$$f(-x^n)=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{-x^n}=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{(-x)^n}=\frac{b}{a-1}\cdot(-x)$$

also gilt:

$$a\cdot f(x^n)+f(-x^n)=a\cdot\frac{b}{a-1}\cdot x-\frac{b}{a-1}\cdot x=(a-1)\cdot\frac{b}{a-1}\cdot x=bx$$

Bemerkung: Damit diese Funktionen wohldefiniert sind, muss man für negative reelle Zahlen x und ungerade Wurzelexponenten n die Wurzel-Funktion in ihrem Definitionsbereich auf die gesamten reellen Zahlen erweitern via $\sqrt[n]{x}=-\sqrt[n]{-x}$, sodass sie auf dem Bereich der gesamten reellen Zahlen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $p:x\mapsto x^n$ ist.

Dies ist möglich, da p eine eineindeutige Abbildung von den reellen Zahlen auf die reellen Zahlen ist.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071244:

Seien die Folgenglieder mit $a_0, a_1, \ldots, a_{15}$ bezeichnet und es gelte (da die Folge geometrisch ist) $a_i=a_0\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^i$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q.

Da $a_{15}=a_0\cdot\frac{p^{15}}{q^{15}}$ ist und p^{15} und q^{15} teilerfremd sind, muss q^{15} ein Teiler von a_0 sein. Es ist $a_0<10^9$. Also muss $q<4$ gelten, denn sonst wäre

$$a_0\geq q^{15}\geq 4^{15}=2^{30}=\left(2^{10}\right)^3=1024^3>1000^3=10^9$$

Wegen $a_9<10^{10}$ und $a_0\geq 10^8$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^9=\frac{a_9}{a_0}<10^2$. Insbesondere ist also $\frac{p}{q}<2$, da sonst $\left(\frac{p}{q}\right)^9\geq 2^9=512>10^2$ wäre.

Als mögliche Quotienten $\frac{p}{q}$ aufeinander folgender Folgenglieder verbleiben also nur die rationalen Zahlen zwischen 1 und 2, welche einen Nenner von höchstens 3 besitzen. Dies sind $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{3}$.

Wegen $a_{14}\geq 10^{11}$ und $a_9<10^{10}$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^5=\frac{a_{14}}{a_9}>10$. Es ist aber $\left(\frac{4}{3}\right)^5<\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{3^5}{2^5}=\frac{243}{32}<10$, sodass als einzig möglicher Quotient $\frac{p}{q}$ der Wert $\frac{5}{3}$ verbleibt.

Damit gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $a_i=n\cdot 3^{15-i}\cdot 5^i$ für alle $0\leq i\leq 15$ gilt.

Wegen $n\cdot 3^6\cdot 5^9=a_9<10^{10}$ und $3^6\cdot 5^9=(3^2\cdot 5^3)^3=(9\cdot 125)^3=(1000+125)^3>1000^3+3\cdot 1000^2\cdot 125=10^9+375\cdot 10^6>1,25\cdot 10^9=\frac{1}{8}\cdot 10^{10}$ ist $n<8$.

Aus $10^8\leq a_0=n\cdot 3^{15}$ folgt mit $3^{15}=3^6\cdot 3\cdot(3^4)^2=9^3\cdot 3\cdot 81^2=729\cdot 3\cdot 6561<750\cdot 20000=1,5*10^7$, dass $n>6$ ist, denn sonst wäre $a_0\leq 6\cdot 1,5\cdot 10^7=9\cdot 10^7<10^8$.

Damit folgt zusammen, dass die Folge genau aus den Zahlen $a_i=7\cdot 3^{15-i}\cdot 5^i$ mit $0\leq i\leq 15$ bestehen muss.

Bemerkung: Die Anzahl der Stellen der einzelnen Folgenglieder kann man nun nachrechnen. Dafür eignet sich ein Rechenwerkzeug, kann aber auch von Hand nachvollzogen werden.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 071245:
Es ist

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \qquad , \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und} \\
\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}$$

Damit lässt sich die linke Seite schreiben als:

$$\begin{aligned}
\sin x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x &= \sin x + \sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) \\
&= \sin x\left(1 + \cos x + 1 - \frac{4}{3}\left(1 - \cos^2 x\right)\right)
\end{aligned}$$

Und damit geht in die Ungleichung über in:

$$\sin x\left(\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3}\right) > 0$$

$\sin x$ ist im gegebenen Intervall stets positiv.

$\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} = 0$ hat keine Nullstelle, da nach Substitution $u = \cos^2 x$ die quadratische Gleichung $\frac{4}{3}u^2 x + u + \frac{2}{3}$ keine reelle Lösung hat.

Damit ist der Term $\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} > 0$ und das Produkt ebenfalls > 0.

Aufgeschrieben und gelöst von einem Matheplanetarier

Lösung 071246:
Der Beweis des Satzes erfordert zwei Schritte; es sind die folgenden Behauptungen zu beweisen:

1. Ist ein Dreieck gleichschenklig, so sind mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang.
2. Sind in einem Dreieck mindestens zwei Winkelhalbierende gleichlang, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Beweis zu 1.:

Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Winkelhalbierenden $AE = w_\alpha$ und $BF = w_\beta$. Ferner sei dieses Dreieck gleichschenklig mit $AC = BC$, also $\sphericalangle CAB = \alpha = \sphericalangle ABC = \beta$. Dann folgt aus

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABF = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle ABE = \sphericalangle FAB \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ABF$$

Somit gilt $AE = BF$, d.h. $w_\alpha = w_\beta$, was zu beweisen war. □

Beweis zu 2.:

Es sei in dem wie oben bezeichneten Dreieck $\triangle ABC$ $w_\alpha = w_\beta$, d.h., $AE = BF$.

Den Beweis, dass dann $\alpha = \beta$ gilt, führen wir indirekt. Angenommen diese Behauptung sei falsch; dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha > \beta$ gilt. Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Der Punkt G sei so gelegen, dass $FG \parallel AE$ und $FG = AE = w_\alpha$ gilt. Dann liegt G außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach dem Kosinussatz gilt nun

$$\begin{aligned}
BE^2 &= c^2 + w_\alpha^2 - 2w_\alpha c\cos\frac{\alpha}{2} \\
AF^2 &= c^2 + w_\beta^2 - 2w_\beta c\cos\frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $w_\alpha = w_\beta$ und $\frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2} < 90°$, also $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. Daraus folgt

$$BE > AF \tag{1}$$

Da $AEGF$ auf Grund der obigen Voraussetzung ein Parallelogramm ist, gilt $AF = EG$. In dem Dreieck $\triangle BGE$ gilt daher wegen (1) $BE > EG$, also

$$\sphericalangle BGE > \sphericalangle EBG \tag{2}$$

Ferner gilt wegen $\sphericalangle FAE = \sphericalangle EGF$

$$\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle EGF > \sphericalangle FBE = \frac{\beta}{2} \tag{3}$$

Durch Addition erhält man aus (2) und (3): $\sphericalangle BGF > \sphericalangle FGB$.

Das ist ein Widerspruch, weil das Dreieck $\triangle FGB$ gleichschenklig mit $AE = BF = FG$. Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen. $\square$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (36)

Quellenverzeichnis

(36) Zeitschrift "Mathematik in der Schule", Verlag Volk und Wissen 1968