8. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080621:

In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: 20 < n < 40.

Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

Aufgabe 080622:

Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im "Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge. Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt $\frac{3}{10}$ und die der kürzesten $\frac{3}{14}$ von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.

Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

Aufgabe 080623:

Über der Seite CD eines Quadrates $ABCD$ mit $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ ist ein gleichseitiges Dreieck ΔDCE so zu konstruieren, daß das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben. Der Punkt E des Dreiecks ΔDCE sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen.

Verbinde E mit A und mit B!

Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle AEB$!

Aufgabe 080624:

Drei Freunde bereiten sich auf die "Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

a) Nach wieviel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, daß Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?

b) Wieviel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080621:

Die Gesamtschülerzahl n muß ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu.

$\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.

Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3, denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 080622:

Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.

Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$. Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.

Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g,$$

dann ergibt sich:

$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g;$$

Daraus folgt: $\frac{1}{70}g = 4$ und demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.

Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m.

In der Tat ergibt sich als Probe

$$72 + 64 = 136, \qquad 72 = 64 + 8,$$
$$84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60),$$
$$60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60).$$

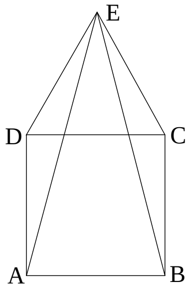
Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 080623:

Im Dreieck ΔAED gilt: (siehe Abb.) $\overline{AD} = \overline{DE}$ (nach Konstruktion)

(1) Daraus folgt $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:

(2) $\overline{\sphericalangle EDA} = \overline{\sphericalangle EDC} + \overline{\sphericalangle CDA} = 150°$; ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$) denn $\overline{\sphericalangle EDC} = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\overline{\sphericalangle CDE} = 90°$ (Winkel im Quadrat).



Aus (1), (2) und $\overline{\sphericalangle AED} + \overline{\sphericalangle EDA} + \overline{\sphericalangle DAE} = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\overline{\sphericalangle AED} = 15°$.

Entsprechend ist $\overline{\sphericalangle BEC} = 15°$, also $\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle DEC} - \overline{\sphericalangle AED} - \overline{\sphericalangle BEC} = 30°$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 080624:

(a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen.

Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das k.g.V. von 225, 300 und 180 beträgt 900, und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.

(b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Quellenverzeichnis

(13) "a+b = b+a" - Heft 52, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 5/6 - Dokumentation I.-XII. Olympiade (1961-1972), Mathematischer Lesebogen vom Rat des Stadtbezirks Leipzig Südost, Abteilung Volksbildung, J. Lehmann und W. Unze, 1973.