8. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080721:

Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau $9,27$ M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt $2,36$ M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M.

Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wieviel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

Aufgabe 080722:

Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$

a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!

b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

Aufgabe 080723:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5,5$ cm und $h_c = 3$ cm!

Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

Aufgabe 080724:

Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck $ABCDE$ ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080721:

Wegen des Gesamtbetrages muß Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.

Da 4 M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben. Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z.B. 3 M; 2,50 M; 2,40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:

Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke

oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080722:

(a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:
$ab + x = a^2$, woraus man
$x = a^2 - ab$ erhält.
Also kann höchstens die Zahl
$x = a^2 - ab = a(a - b)$ Lösung sein.
Tatsächlich ist
$a \cdot b + a(a - b) = ab + a^2 - ab = a^2$.

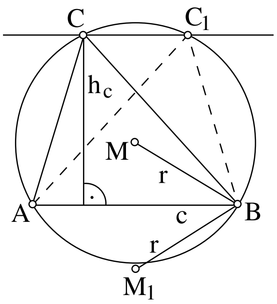
(b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt:
$ab - y = b^2$, woraus man
$y = ab - b^2$ erhält.
Also kann höchstens die Zahl
$y = ab - b^2 = b(a - b)$ Lösung sein.
Tatsächlich ist
$a \cdot b - b(a - b) = ab - ab + b^2 = b^2$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080723:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks ΔABC im Abstand h_c von AB.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ΔABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



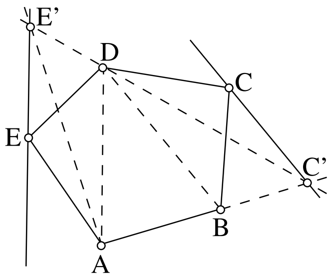
Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt. Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c. Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht. Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1. Die Dreiecke ΔABC bzw. ΔABC_1 entsprechen den Bedingungen.

(III) Der Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ΔABC tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080724:

Das Fünfeck $ABCDE$ läßt sich in die Teildreiecke ΔADE, ΔABD und ΔBCD zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'. Dann ist das Dreieck $\Delta BC'D$ flächeninhaltsgleich dem Dreieck ΔBCD; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein.



Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und verlängert $C'D$ über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\Delta ADE'$ ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck ΔADE.
Daher ist das aus den Teildreicken $\Delta ADE'$, ΔABD und $\Delta BC'D$ bestehende Dreieck $\Delta AC'E'$ flächeninhaltsgleich dem Fünfeck $ABCDE$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.