



8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen





8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 080731:

Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.

- Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!
- Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

Aufgabe 080732:

Gegeben sei eine positive ganze Zahl n . Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z.B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden.

Ermittle

- für $n = 7$,
- für $n = 10$,
- für beliebiges (positives ganzzahliges) n

die Anzahl aller dieser Darstellungen!

Aufgabe 080733:

Beweise folgenden Satz!

Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$ das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

Aufgabe 080734:

Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, daß einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen.

Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln.



Aufgabe 080735:

Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1 , g_2 und g_3 , die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1 .

Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Seitenhalbierenden s_a , s_b und s_c auf g_1 , g_2 bzw. g_3 liegen!

Aufgabe 080736:

Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.

Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?

(Der 30.04.1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).



8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 080731:

- a) Die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 lassen, beginnt: 4; 11; 18; 25; 32; 39; 46; 53; 60; 67; 74; 81; 88; 95; ...

Von diesen Zahlen lassen bei der Division durch 4 den Rest 3 genau die Zahlen: 11; 39; 67; 95; ... (ab 11 jede vierte Zahl der vorigen Folge).

Die kleinste unter diesen Zahlen, die auch noch bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, ist die Zahl 67.

- b) Weitere, den Bedingungen entsprechende natürliche Zahlen erhält man, indem man zu 67 gemeinsame Vielfache von 3, 4 und 7 addiert. Insbesondere erhält man die nächstgrößeren derartigen Zahlen, wenn man wiederholt das k.g.V. von 3, 4 und 7 (d.i., da 3, 4, 7 paarweise teilerfremd sind, die Zahl $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$) zu 67 addiert. Die nächsten so entstehenden Zahlen sind: 151; 235; 319; ...

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080732:

- a), b) Die sämtlichen genannten Darstellungen sind:

$$\begin{array}{llll} 7 = 1 + 6, & 7 = 2 + 5, & 7 = 3 + 4, & \\ 10 = 1 + 9, & 10 = 2 + 8, & 10 = 3 + 7, & 10 = 4 + 6 \end{array}$$

ihre Anzahl beträgt 3 bzw. 4.

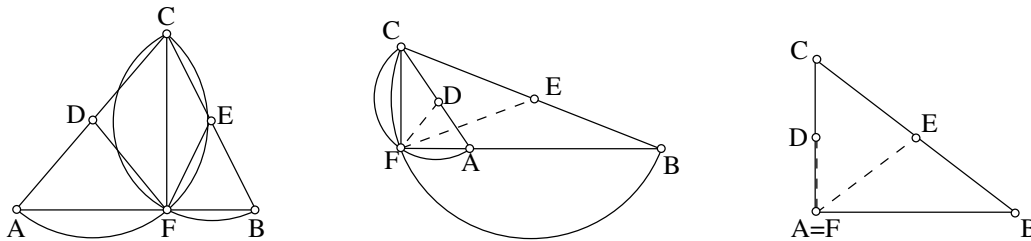
- c) Ist n ungerade, so treten in den sämtlichen genannten Darstellungen genau die Zahlen $1, \dots, n - 1$ als Summanden auf, und zwar jede genau einmal. Da hierbei in jeder Darstellung genau zwei dieser Summanden vorkommen, ist die Anzahl der Darstellungen folglich $\frac{n-1}{2}$.

Ist n gerade, so treten dagegen nur die Zahlen $1, \dots, n - 1$ mit Ausnahme der Zahl $\frac{n}{2}$ auf. Diese Ausnahme rührt daher, daß in einer Darstellung von n mit einem Summanden $\frac{n}{2}$ der zweite Summand ebenfalls $\frac{n}{2}$ lauten müßte, also nicht von dem ersten verschieden wäre. Daher beträgt nun die gesuchte Anzahl $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080733:

Es sei o.B.d.A. der Punkt C der Eckpunkt, von dem aus das Lot auf die Gerade durch A und B gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes sei F , der Mittelpunkt von AC sei D , der von BC sei E .



Dann sind die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle CFB$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F (eventuell ist eines dieser Dreiecke ausgeartet, falls nämlich bei A bzw. B ein rechter Winkel liegt. Die Betrachtungen gelten aber auch in diesem Falle, da dann $A = F$ bzw. $B = F$ ist) und die Punkte A, F, C bzw. C, F, B liegen nach Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AC bzw. BC .

Da D Mittelpunkt von AC bzw. E Mittelpunkt von BC ist, ist

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DF} \text{ bzw. } \overline{CE} = \overline{BE} = \overline{EF} \text{ als Radien in den Thaleskreisen.}$$

Mithin gilt

$$\overline{DF} + \overline{EF} = \overline{AD} + \overline{EB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BC}) \quad \square$$

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080734:

Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben. Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt.

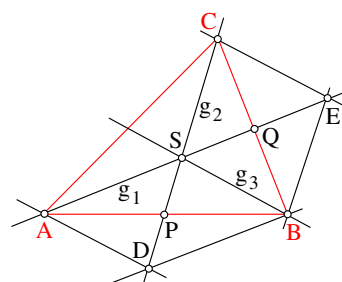
Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen. Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080735:

- I. Angenommen, es gibt ein Dreieck $\triangle ABC$ (siehe Abb.), das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Mittelpunkt von AB sei P , der Mittelpunkt von BC sei Q . Dann liegt P auf der Seitenhalbierenden s_C und damit auf g_2 und Q auf s_a und damit auf g_1 .

Verlängert man nun SP bzw. SQ über P bzw. Q hinaus um sich selbst (die so entstehenden Punkte seien D und E), so sind die Vierecke $ADBS$ bzw. $BECS$ Parallelogramme, da sich ihre Diagonalen halbieren.



- II. Ein Dreieck $\triangle ABC$ kann daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man zieht durch A die Parallele zu g_3 . Sie schneide g_2 im Punkt D . Dann halbiert man SD (Halbierungspunkt sei P) und zieht die Gerade durch A und P . Sie schneide g_3 im Punkt B . Nun zieht man durch B die Parallele zu g_2 , die g_1 in E schneide. Man halbiert SE (Halbierungspunkt sei Q) und zieht die Gerade durch P und Q , die g_2 in C schneide.



III. Wenn sich das Dreieck $\triangle ABC$ so konstruieren läßt, dann entspricht es den Bedingungen.

Beweis: Laut Konstruktion sind die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle BSP$ sowie $\triangle BEQ$ und $\triangle CSQ$ kongruent, denn sie stimmen in einer Seite und den Winkeln überein. Also sind die Vierecke $ADBS$ und $BECS$ Parallelogramme, und es gilt $\overline{AP} = \overline{PB}$ sowie $\overline{BQ} = \overline{QC}$. Daher sind CP und AQ Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$. Ihr Schnittpunkt S muss auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegen, die damit auf g_3 liegt.

IV. Die Konstruktion ist stets ausführbar und eindeutig. Denn von den Geraden g_1, g_2, g_3 sind keine zwei parallel, so dass also die Schnittpunkte D, B, E und C stets existieren und eindeutig bestimmt sind. Da weder B noch C mit S zusammenfällt, kann weder B (als Punkt von g_3) noch C (als Punkt von g_2) mit dem Punkt A von g_1 zusammenfallen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)

Lösung 080736:

Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar

45 Jahre zu 366 Tagen und
145 Jahre zu 365 Tagen.

In den 45 Jahren rückte der Wochentag um 90 Wochentage vor, in den 145 Jahren um 145 Wochentage. Das sind zusammen 235 Wochentage, d.h. 33 mal eine Woche und 4 Wochentage. Daher war der 30.4.1777 ein Mittwoch.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (14)



Quellenverzeichnis

- (14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.