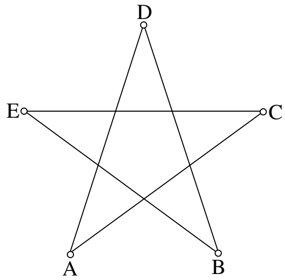
8. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

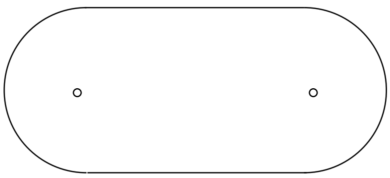
Aufgabe 080811:



Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, bei dem die Punkte A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ACE$!

Aufgabe 080812:



Die Abbildung zeigt die 400 m lange Laufstrecke auf der Innenbahn eines Stadions. Die Laufstrecke werde idealisiert dargestellt durch zwei Halbkreise und die je 90 m langen Seiten eines Rechtecks. Bei einem 10 000 -m-Lauf beobachten wir, daß ein Läufer während einer ganzen Runde nicht innen, sondern weiter außen auf der 2. Bahn, und zwar stets 1 m von der gezeichneten Laufstrecke entfernt, läuft.

Wieviel Meter mehr als 400 m legt er während dieser Runde zurück?

Anmerkung: Setze für π die Zahl $\frac{22}{7}$, und runde die Ergebnisangabe auf volle Meter!

Aufgabe 080813:

Gerd und Bernd haben sich ein Kartenspiel ausgedacht. Sie schneiden 6 Pappkarten aus und numerieren sie nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sie vereinbaren folgende Spielregeln: Jeder bekommt nach dem Mischen drei dieser Karten. Dann spielt jeder nacheinander jeweils eine Karte aus. Wer die Karte mit einer größeren Zahl ausspielt, bekommt den "Stich" und darf nun ausspielen. Nach drei in dieser Weise zustandegekommenen "Stichen" ist die Runde beendet. Wer in einer Runde mindestens zwei "Stiche" gewinnt, ist in dieser Runde Sieger. Um häufiger als Bernd Sieger zu werden, erklärt sich Gerd bereit, in jeder Runde als erster auszuspielen. Er nimmt an, dadurch mehr Möglichkeiten zum Gewinn zu haben.

Überprüfe anhand der möglichen Kartenverteilungen und der jeweils möglichen Spielverläufe, ob Gerds Annahme richtig war! Dabei wollen wir voraussetzen, daß jeder der Spieler stets für sich möglichst günstig spielt.

Aufgabe 080814:

Beweise:

> Wenn eine Zahl $100a + b$ (a und b sind natürliche Zahlen) durch 7 teilbar ist, so ist auch die Zahl $a + 4b$ durch 7 teilbar!

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080811:

Es sei M der Umkreismittelpunkt des Fünfecks $ABCDE$. Der Winkel $\sphericalangle ACE$ ist ein Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle AME$ und deshalb halb so groß wie dieser.

Weil das Fünfeck regelmäßig ist, ist dieser Zentriwinkel $72°$ groß. Also hat der Winkel $\sphericalangle ACE$ eine Größe von $36°$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080812:

Im Folgenden werden die Maßzahl des Kreisumfanges, die Maßzahl des Kreisdurchmessers und die Maßzahl des zurückgelegten Weges mit u, d bzw. s bezeichnet. Dann gilt

(1) $u = 400 - 180 = 220$

Wegen $d = \frac{u}{\pi}$ ist $d \approx \frac{220 \cdot 7}{22} = 70$.

Ferner besteht die 2. Bahn aus zwei zu den Halbkreisen der 1. Bahn jeweils konzentrischen Halbkreisen von um 1 m größerem Radius sowie aus zwei Strecken von je 90 m Länge. Also gilt

(2) $s = 72 \cdot \pi + 2 \cdot 90$,

$s \approx 226 + 180 = 406$.

Der Läufer legt daher während dieser Runde etwa 6 m mehr zurück.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080813:

Wir bezeichnen im folgenden die Karten durch die auf ihnen stehenden Zahlen. Es gibt insgesamt 20 Möglichkeiten, aus 6 Karten 3 verschiedene auszuwählen, nämlich:

1, 2, 3	1, 2, 4	1, 2, 5	1, 2, 6
	1, 3, 4	1, 3, 5	1, 3, 6
		1, 4, 5	1, 4, 6
			1, 5, 6
	2, 3, 4	2, 3, 5	2, 3, 6
		2, 4, 5	2, 4, 6
			2, 5, 6
		3, 4, 5	3, 4, 6
			3, 5, 6
			4, 5, 6

Besitzt ein Spieler die Karten 5 und 6, dann erhält er stets (mindestens) 2 Stiche. Das gilt auch, wenn er die Karten 3, 4, 5 besitzt.

Ferner gewinnt er stets, wenn er die Karten 4 und 6, aber nicht 5 hat; denn hierzu braucht er z.B. nur zuerst die dritte Karte, die er außer 4 und 6 noch hat, aufzulegen. Auf diese Weise kann er stets erzwingen, dass entweder diese Karte oder seine 4 einen Stich gewinnt; ein weiterer Stich ist ihm durch die 6 sicher.

Schließlich gewinnen auch stets die Karten 2, 3, 6, da die 1 des Gegenspielers stets gestochen werden kann. Es muss nur so gespielt werden, dass das nicht mit der 6 geschieht, d.h., der Besitzer der 6 darf diese, wenn er auszuspielen beginnt, nicht als erste Karte ausspielen.

Verlieren muss auf jeden Fall daher der Spieler, der eine der folgenden Kartenzusammenstellungen besitzt:

$$1,2,3 \qquad 1,2,4 \qquad 1,2,5 \qquad 1,2,6 \qquad 1,3,4 \qquad 1,3,5 \qquad 1,4,5 \qquad 2,3,4 \qquad 2,3,5$$

Besitzt ein Spieler aber die Karten 1, 3, 6 bzw. 2, 4, 5, dann verliert er, wenn er zuerst ausspielen muss.

Im 1. Fall sticht der Gegenspieler stets die 1, und zwar (wenn sie als erste Karte eines "Stiches" ausgespielt wird) mit der 2, während er mit einer der Karten 4 und 5 die 3 stechen kann. Im 2. Fall darf der Gegenspieler nur (mit der 3) stechen, falls der Anspielende die 2 anspielt; andernfalls gibt er den ersten Stich durch Zugeben der 1 ab und kann dann bei dem erneuten Anspiel stets mit der Karte stechen, die die ausgespielte Karte gerade noch sticht. Dadurch erhält er aber auch noch den letzten Stich.

Der zuerst Anspielende hat also nur genau 9 (von 20) Möglichkeiten, eine für ihn günstige Kartenzusammenstellung zu erhalten.

Daher ist es nicht günstig für Gerd, wenn er stets zuerst ausspielt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080814:

Nach der Voraussetzung gilt $100a+b=7k$ mit ganzem k. Um $4b$ zu erhalten, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit 4 und bekommt $400a+4b=4\cdot 7k$.

Um auf den Term $a+4b$ zu kommen, formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} 399a+a+4b &= 4\cdot 7k \\ 7\cdot 57a+a+4b &= 4\cdot 7k \\ a+4b &= 7(4k-57a) \end{aligned}$$

Dieser Term $7(4k-57a)$ ist durch 7 teilbar. Also ist auch $a+4b$ durch 7 teilbar.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" – Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.