8. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080821:

a) Beweise folgende Aussage:

   Wenn in einem Drachenviereck $ABCD$ zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch Umkreis.

b) Zeige, daß diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

Aufgabe 080822:
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. Und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet.

Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

Aufgabe 080823:
Beweise folgenden Satz:

> Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d.h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks ΔABC ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.

Aufgabe 080824:
Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

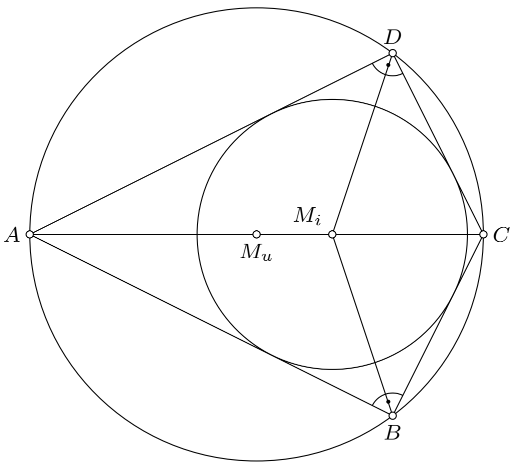
b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080821:

a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis.



Beweis:

Hat ein Drachenviereck $ABCD$ etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ kongruent (sss). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i.

Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks $ABCD$. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand. Wegen der Konvexität von $ABCD$ fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks $ABCD$.

Für ein Drachenviereck $ABCD$ mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$

   In diesem Fall hat das Drachenviereck $ABCD$ als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.

2. Fall: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90°$

   In diesem Fall folgt aus

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 360° - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD) = 180°$$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ (dies wegen $\triangle ABC \cong \triangle ADC$), dass $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$ gilt, also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.

b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, dass er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$).

Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B.

(Bemerkung: Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Vierecksseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden.)

c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\triangle ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels ABC und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d.h., M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080822:

Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als $100a + 10b + c$ und die zweite Zahl z_2 als $100c + 10b + a$ darstellbar. Für die Differenz $d = z_1 - z_2$ ergibt sich

$$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:

(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d.s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,

(2) alle natürlichen Teiler von $|a - c|$,

(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

Ausführliche Aufzählung: *)

Für $|a-c|$ kommen (wegen $0 < a \leq 9$; $0 < c \leq 9$; a, c ganzzahlig) nur die Werte $0, ..., 8$ in Frage; man erhält:

$\lvert a - c\rvert$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3,6,9,11,18,22,33,66,99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3,4,6,9,11,12,18,22,33,36,44,66,99,132,198,396
5	1,3,5,9,11,15,33,45,55,99,165,495
6	1,2,3,6,9,11,18,22,27,33,54,66,99,198,297,594
7	1,3,7,9,11,21,33,63,77,99,231,693
8	1,2,3,4,6,8,9,11,12,18,22,24,33,36,44,66,72,88,99,132,198,264,396,792

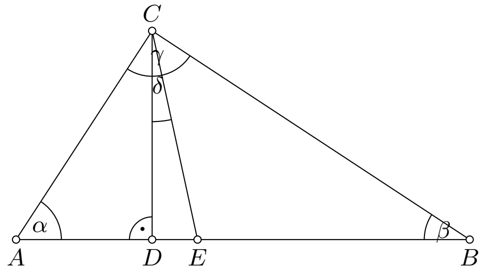
*) Diese Aufzählung wird nicht verlangt, falls (1), (2), (3) richtig angegeben sind.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080823:

Es sei o.B.d.A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\triangle ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben.

Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0°$ und die Behauptung daher richtig.



Sei nun $\alpha \neq \beta$, etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\sphericalangle DEC \cong \sphericalangle AEC$, d.h. $90° - \delta = 180° - (\alpha + \frac{\gamma}{2}$, also

$$\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90° = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) - 90° = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Lösung 080824:

In der Zeit $t_i = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x\frac{km}{h}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x + 25)\frac{km}{h}$.

Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann: $x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}$.

Daraus erhält man $x = \frac{5 \cdot 55}{60} = 45\frac{5}{6}$.

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\frac{km}{h}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\frac{km}{h}$.

b) Wegen

$$\frac{5 \cdot 55}{60} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64,9$$

beträgt die durchgefahrene Wegstrecke $s \approx 64,9$ km.

Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wie eine Probe zeigt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) ”a+b = b+a” – Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.