8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080931:

Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.

> "Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64. Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17. Die so gebildete Zahl, hier also 1 764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42."

Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Aufgabe 080932:

Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus a, $b+c$ und α!

Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Aufgabe 080933:

Geben Sie alle Zahlentripel (a, b, c) an, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b+c &= s_1 \qquad & a-b+c &= s_3 \\ a+b-c &= s_2 \qquad & a-b-c &= s_4 \end{aligned}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, daß die Menge der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Aufgabe 080934:

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC.

Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Aufgabe 080935:

Es ist zu beweisen, daß für jede ungerade Zahl n die Zahl $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ durch 512 teilbar ist.

Aufgabe 080936:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, daß zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080931:

Wir betrachten drei Fälle. Sei immer x die betrachtete Zahl.

1. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist einstellig (d.h. $x \in \{47, \ldots, 50\}$). Da $(50-x)^2$ einstellig ist, ist die gebildete Zahl dann $10(x-25)+(50-x)^2 = x^2 - 90x + 2250$.

   Das ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, dies liegt aber nicht im betrachteten Bereich. Für diese Zahlen funktioniert das Verfahren also nicht.

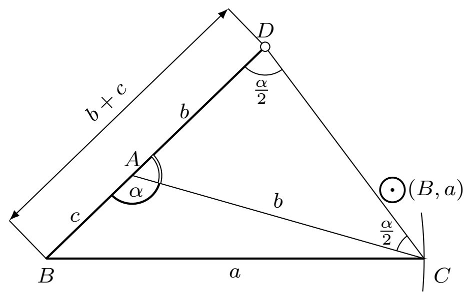
2. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist zweistellig (d.h. $x \in \{41, \ldots, 46\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $100(x-25)+(50-x)^2 = x^2$, hier funktioniert das Verfahren also.

3. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist dreistellig (d.h. $x \in \{26, \ldots, 40\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $1000(x-25)+(50-x)^2 = x^2 + 900x - 22500$ und dies ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, was nicht im betrachteten Bereich liegt.

Also geht das Verfahren genau dann, wenn x zwischen 41 und 46 liegt.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 080932:



Wird die Seite c eines Dreieck ABC um die Strecke b verlängert, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b+c$.

Durch die Verbindung von D und C entsteht das gleichschenklige Dreieck ACD mit dem Winkel $180° - \alpha$ an der Spitze A und zufolge mit dem Basiswinkel $\frac{\alpha}{2}$ und Schenkeln der Länge b.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

(1) Ziehe die Strecke $b + c =: BD$, womit die Punkte B und D festgelegt werden.

(2) Lege eine Gerade h durch D, die mit BD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.

(3) Beschreibe einen Kreis $\odot(B,a)$ um B vom Radius a.

Hier hängt es von der Größe des Winkels α ab, ob es zwischen h und $\odot(B,a)$ keinen oder zwei Schnittpunkte (C_1 und C_2) oder einen Berührpunkt (C_1) gibt.

(4) Lege durch die Schnittpunkte aus (3) jeweils eine Gerade, die mit h den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt; welche die Strecke BD im Punkt A_1 bzw. in den Punkten A_1 und A_2 schneidet.

(5) Durch Verbindung A_1BC_1 bzw. A_1BC_1 und A_2BC_2 erhält man eine bzw. zwei Lösungen für das gesuchte Dreieck.

Berechnung:

Sei $\overline{b} := CD$, $\overline{c} = BD = b + c$ und $\overline{\gamma} = \sphericalangle BCD$.

$$\frac{\sin(\overline{\gamma})}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\overline{c}}{a} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(\overline{\gamma}) = \frac{\overline{c}}{a}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \overline{\gamma}_1 = \arcsin\left(\frac{\overline{c}}{a}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \Rightarrow \overline{\gamma}_2 = 180^\circ - \overline{\gamma}_1$$

$$\beta_{1/2} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \overline{\gamma}_{1/2} \qquad ; \qquad \gamma_{1/2} = 180^\circ - \alpha - \beta_{1/2}$$

$$\frac{\sin(\beta_{1/2})}{\sin(\alpha)} = \frac{b_{1/2}}{a} \quad\Leftrightarrow\quad b_{1/2} = a\cdot\frac{\sin(\beta_{1/2})}{\sin(\alpha)} \quad ; \quad \frac{\sin(\gamma_{1/2})}{\sin(\alpha)} = \frac{c_{1/2}}{a} \quad\Leftrightarrow\quad c_{1/2} = a\cdot\frac{\sin(\gamma_{1/2})}{\sin(\alpha)}$$

Bedingungen für die Konstruktion:

Nach der Dreiecksungleichung muss die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite sein, also muss in allen Fällen $b + c > a$ gelten.

Gemäß Konstruktionsschritt (3) können der Kreis, beschrieben um B vom Radius a, und die Gerade, die mit BD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt, keinen oder zwei Schnittpunkte oder einen Berührungspunkt haben.

Im Grenzfall $\alpha = \alpha_{\max}$ ist $\frac{\alpha}{2} + \gamma = 90^\circ$. Damit wird mit den Ergebnissen der Berechnung:

$$90^\circ = \frac{\alpha}{2} + \gamma = \frac{\alpha}{2} + (180^\circ - \alpha - \beta) = \frac{\alpha}{2} + 180^\circ - \alpha - \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \overline{\gamma}\right) = \overline{\gamma} = \arcsin\left(\frac{\overline{c}}{a}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{c}}{a}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin(90^\circ) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{\overline{c}} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow \quad \alpha_{\max} = 2\cdot\arcsin\left(\frac{a}{b+c}\right)$$

Also ist die Konstruktion genau dann möglich, wenn $\alpha \le 2\cdot\arcsin\left(\frac{a}{b+c}\right) = \alpha_{\max}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Hyperplot

Lösung 080933:

Addition der ersten und vierten Gleichung ergibt $2a = s_1 + s_4$.

Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt $2a = s_2 + s_3$.

Das geht nur, wenn $s_1 = 1$ und $s_4 = 4$ oder umgekehrt und $s_2 = 2, s_3 = 3$ oder umgekehrt. Daraus folgt $2a = 5$, also $a = \frac{5}{2}$.

Für $s_1 = 1, s_4 = 4$ folgt dann $b + c = -\frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$\frac{5}{2} + c + \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = -1$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = -\frac{1}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = -\frac{1}{2}$ bzw. $b = -1$.

Für $s_1 = 4, s_4 = 1$ folgt $b+c = \frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2}+c-\frac{3}{2}+c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = \frac{1}{2}$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = 1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = 1$ bzw. $b = \frac{1}{2}$.

Es gibt also insgesamt die Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 3, 2, 4)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 1, 2, 3, 4)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 4, 3, 2, 1)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 4, 2, 3, 1)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 2, 4, 1, 3)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2}) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 2, 1, 4, 3)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 3, 4, 1, 2)) \\
(a,b,c) &= (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \quad (\text{wenn} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4 = 3, 1, 4, 2))
\end{aligned}$$

und eine Probe ergibt, dass dies tatsächlich Lösungen sind.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 080934:

Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende zusammen, insbesondere also auch ihre Mittelpunkte. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, wobei der längere Abschnitt in Richtung der Eckpunkte liegt.

Demzufolge ist der Umkreisradius genau doppelt so groß wie der Inkreisradius und es ergibt sich ein Verhältnis von 4 zwischen Umkreisfläche und Inkreisfläche.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 080935:

Sei $m = n^4$. Dann ist die Zahl $m^3 - m^2 - m + 1$ zu untersuchen.

Es gilt $m^3 - m^2 - m + 1 = (m-1)^2(m+1)$.

Da n ungerade ist, gilt $n = 2k + 1$ und damit

$$m = (2k+1)^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1$$

Damit ist $m + 1$ durch 2 teilbar und es gilt

$$m - 1 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k = 16(k^4 + 2k^3 + k^2) + 8(k^2 + k)$$

Da $k^2+k = k(k+1)$ gerade ist, ist also $m-1$ durch 16 teilbar. Also ist m^3-m^2-m+1 durch $16 \cdot 16 \cdot 2 = 512$ teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 080936:
Wir legen alle Punkte so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass o.B.d.A. $P = 0$ im Ursprung liegt.

Das Standardskalarprodukt bezeichnen wir mit $\langle , \rangle$.

Dann ist $a^2 = \langle A, A\rangle$, $b^2 = \langle D, D\rangle$, $c^2 = \langle C, C\rangle$. Da $AB \perp BC$ gilt außerdem $\langle A - B, B - C\rangle = 0$, also $\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle = b^2 + \langle A, C\rangle$.

Da $D = A + B - C$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} d^2 &= \langle D, D\rangle = \langle A + B - C, A + B - C\rangle = \langle A, A + C - B\rangle + \langle C - B, A + C - B\rangle \\ &= a^2 + \langle A, C\rangle - \langle A, B\rangle + \langle C - B, A - B\rangle + \langle C - B, C\rangle \\ &= a^2 + \langle A, C\rangle - \langle A, B\rangle + 0 + c^2 - \langle B, C\rangle \\ &= a^2 + c^2 + \langle A, C\rangle - \langle A, B\rangle - \langle B, C\rangle = a^2 + c^2 - b^2 \end{aligned}$$

Also gilt $d = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon