8. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

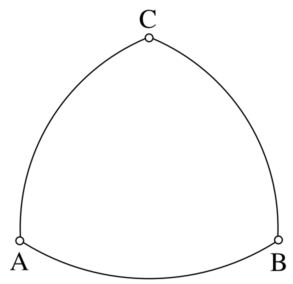
8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081011:

Der Flächeninhalt F der in der Abb. dargestellten Figur soll berechnet werden. Die Punkte haben untereinander die Abstände $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$.

Die Verbindungslinien sind Kreisbögen mit dem Radius a (Mittelpunkt ist jeweils der gegenüberliegende Punkt).



Aufgabe 081012:

Ermitteln Sie alle Primzahlen p mit folgender Eigenschaft!

Addiert man zu p die Zahl 50 und subtrahiert man von p die Zahl 50, dann erhält man zwei Primzahlen.

Aufgabe 081013:

In einem alten Mathematiklehrbuch stößt Günter auf eine Konstruktion, von der behauptet wird, sie führe zur Errichtung der Senkrechten auf einer Geraden g in einem Punkt P. Sie beginnt folgendermaßen:

“Um einen beliebigen, jedoch nicht auf g liegenden Punkt Y wird der Kreis mit dem Radius $\overline{PY}$ geschlagen. Sein zweiter Schnittpunkt mit der Geraden g sei A. Dann ...”

Die folgende Seite fehlt jedoch.

a) Vervollständigen Sie die Konstruktionsbeschreibung durch geeigneten Text!

b) Weisen Sie die Richtigkeit des Lösungsweges nach!

c) Untersuchen Sie, ob das angegebene Vorgehen immer zum Ziel führt!

Aufgabe 081014:

Einige Schüler der Klassen 9 und 10 einer Schule nahmen an einem Schachturnier teil. Dabei spielte jeder Teilnehmer mit jedem anderen genau eine Partie. Für einen Sieg gab es einen Punkt, für ein Unentschieden einen halben Punkt. Obwohl genau 10mal so viel Schüler der Klasse 10 wie der Klasse 9 teilnahmen, erreichten sie nur $4\,\frac{1}{2}$mal so viele Punkte wie die Schüler der Klasse 9.

Wieviel Teilnehmer aus Klasse 9 waren es, und wie viele Punkte haben sie erreicht?

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081011:

Die Fläche kann durch Übereinanderabdecken von drei Kreissektoren mit dem Radius a und einem Zentriwinkel der Größe 60° erzeugt werden. Das gleichseitige Dreieck ΔABC wird dabei dreifach bedeckt. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher gleich der Differenz aus der Summe der Flächeninhalte der drei Kreissektoren und dem doppelten Flächeninhalt des DReiecks ΔABC.

Da der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a bekanntlich $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ beträgt, erhält man

$$F = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 081012:

Angenommen, eine Primzahl p habe die genannte Eigenschaft. Dann sind die Zahlen $p-50$ und $p+50$ ebenfalls Primzahlen.

Nun läßt $p+50 = p+48+2$ bei Division durch 3 den gleichen Rest wie $p+2$, und es läßt $p-50 = p-51+1$ bei Division durch 3 den gleichen Rest wie $p+1$.

Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p, $p+1$, $p+2$ muß jedoch eine durch 3 teilbar sein, also auch eine von den Zahlen p, $p-50$ und $p+50$. Da es genau eine durch 3 teilbare Primzahl gibt, nämlich die 3 selbst, muß sie unter diesen drei Zahlen vorkommen, und sie muß die kleinste von ihnen sein, da sonst $p-50$ keine natürliche Zahl, also keine Primzahl, wäre. Daher folgt $p-50 = 3$; also kann nur $p = 53$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft haben. Umgekehrt ist dies in der Tat der Fall; denn sowohl $p = 53$ als auch $p+50 = 103$ als auch $p-50 = 3$ sind Primzahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 081013:

a) ... zieht man eine Gerade durch A und Y. Den anderen Punkt in dem sie den Kreis schneidet, nennen wir B. Jetzt verbindet man B und P, und man hat eine Senkrechte auf P.

b) $\sphericalangle APY = \sphericalangle YAP$, da sie Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind; das Dreieck ist gleichschenklig, da die Schenkel Radien im Kreis sind. (1)

$\sphericalangle YPB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle PYA$, da $\sphericalangle YPB = \sphericalangle PBY$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, weil Radien im

Kreis, $\sphericalangle PYA$ ist Außenwinkel) (2)

$$\begin{aligned}\sphericalangle APB &= \sphericalangle APY + \sphericalangle YPB \\ &= \sphericalangle APY + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle PYA \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \sphericalangle APY + \sphericalangle PYA) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle APY + \sphericalangle YAP + \sphericalangle PYA) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

c) Nein. Diese Konstruktion führt nur dann nicht zum Ziel, wenn Y wie laut Aufgabenstellung auf g oder auf der Senkrechten zu g durch P liegt, da P dann Berührungspunkt der Tangente g zum Kreis ist und dadurch der einzige Punkt, an dem der Kreis g schneidet.

Aufgeschrieben und gelöst von Philipp Schulz

Lösung 081014:

Vorbemerkung: n, $m \in \mathbb{N}$; P_n und P_m sind positive gebrochene Zahlen

Klasse 9: m Schüler, P_m Punkte
Klasse 10: $n = 10m$ Schüler, $P_n = 4,5 \cdot P_m$ Punkte

Die Anzahl aller Spiele entspricht gerade der Summe aller Punkte, weil bei jedem Spiel 1 Punkt für den Sieger und keiner für den Verlierer (zusammen: 1 Punkt) oder je 0,5 Punkte (zusammen: 1 Punkt) vergeben wurden:

$$\begin{aligned}\frac{(n+m) \cdot (n+m-1)}{2} &= P_n + P_m \\ \frac{(10m+m) \cdot (10m+m-1)}{2} &= 4.5P_m + P_m = 5.5Pm \\ 11m \cdot (11m-1) &= 11P_m \\ \Rightarrow P_m &= m \cdot (11m-1) \qquad (1)\end{aligned}$$

Der maximale Punktzahl der Schüler der 9. Klasse ist (Punkte der Spiele der Schüler aus der 9. Klasse untereinander + alle Spiele zwischen Schülern aus der 9. und 10. Klasse wurden gewonnen):

$$(P_m)max = 0.5 \cdot m \cdot (m-1) + m \cdot n = 0.5 \cdot m \cdot (m-1) + 10m^2$$

Offensichtlich sollte die maximal mögliche Punktzahl größer gleich der wirklich erreichten sein:

$$\begin{aligned}Pm = m \cdot (11m-1) &\leq 0.5 \cdot m \cdot (m-1) + 10m^2 \\ 11m^2 - m &\leq 0.5m^2 - 0.5m + 10m^2 \\ 22m^2 - 2m &\leq 21m^2 - m \\ m^2 - m &\leq 0 \\ m \cdot (m-1) &\leq 0\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist nur für natürliche m nur bei Gleichheit eines Faktors mit Null erfüllt, also bei $m = 0$ und $m = 1$, da nie gleichzeitig gelten kann: $m < 0$ und $m - 1 > 0$ bzw. $m > 0$ und $m - 1 < 0$. Offensichtlich ist $m = 0$ keine sinnvolle Lösung, da dies einem Schachturnier ohne jeden Teilnehmer entspräche ...

Also: Ein Schüler der Klasse 9 nahm teil ($m = 1$). Er erreichte 10 Punkte (entsprechend Gleichung (1) $P_m = 10$)

Aufgeschrieben und gelöst von Arnd Hübsch

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag