8. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081221:

Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p+10$ als auch $p+14$ Primzahlen sind!

Aufgabe 081222:

In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks.

Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander $90°$ beträgt?

Aufgabe 081223:

Man gebe zwölf reelle Zahlen a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6 so an, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$\begin{aligned} x^{12}+1 &= (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3) \\ &\quad \cdot(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6) \end{aligned}$$

gilt!

Aufgabe 081224:

Es sind, alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4| = |x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|$$

erfüllt ist.

Aufgabe 081225:

Man beweise $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Aufgabe 081226:

Ein Trapez $ABCD$, dessen Grundseiten die Längen a und b ($a > b$) haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis.

Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081221:

Sei $a \in \{0, 1, 2\}$ der Rest von p bei Division durch 3.

Gilt $a = 1$, so ist $p + 14$ durch 3 teilbar und wegen $p + 14 > 3$ keine Primzahl.

Gilt $a = 2$, so ist analog $p + 10$ durch 3 teilbar und keine Primzahl. Also muss p durch 3 teilbar sein, es muss also $p = 3$ gelten.

Dann gilt $p + 10 = 13, p + 14 = 17$ und da dies Primzahlen sind, gibt es genau eine Lösung: $p = 3$.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 081222:

Der Winkel zwischen zwei Seitenflächen liegt in einer Ebene, die senkrecht auf den beiden Seitenflächen steht. Diese senkrechte Ebene schneidet die beiden Seitenflächen in zwei Seitenflächenhöhen, die senkrecht auf einer Seitenlange stehen und einen gemeinsamen Fußpunkt haben.

Der Winkel zwischen den beiden Seitenflächenhöhen ist der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen. $\sphericalangle AEB$ ist ein solcher Winkel. Seine Größe sei τ. Es gilt somit nach Aufgabenstellung $\tau = 90°$. Dreieck AEB ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$. Nach Innenwinkelsummensatz gilt somit $\tau + 2\epsilon = 180°$ und somit $\epsilon = 45°$. Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck AB:

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE| \cos\epsilon \tag{1}$$

Da die Dreiecke ACS und BCS kongruent und gleichschenklig sind, ist $|AE| = |BE|$. Einsetzen in (1) liefert zudem mit $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $|AB| = a$:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$|AB||AE| \cdot \sqrt{2} = |AB|^2 \iff |AE| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Sei $\varphi = \sphericalangle BCE$. Dreieck CBE ist rechtwinklig. Es gilt: $\sin\varphi = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a} \iff \varphi = 45°$.
Dreieck CBS ist gleichschenklig mit Basis CB. Sei h_s die Höhe auf der Basis und s die Länge der Seitenkante. Es gilt $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{s} \iff s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ Dreieck ABC ist gleichseitig. Die Höhe im gleichseitigen beträgt $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und die Seitenhalbierenden (im Dreieck gleichzeitig Höhe) schneiden sich im Verhältnis 2:1 , wobei die Strecke vom Schwerpunkt zum Eckpunkt doppelt so lang ist, wie die Strecke vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt der Seite.

Dreieck HCS ist rechtwinklig. Nach dem Satz Satz des Pythagoras gilt:

$$\left(\frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \iff h = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

Der Quotient berechnet sich also zu $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Aufgeschrieben und gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösung:

Das gleichseitige Dreieck ABC liege in der xy-Ebene, der Punkt A liege im Ursprung, B auf der x-Achse. Dann sind die Ortsvektoren von B und C:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Spitze S der Pyramide

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor auf die Seitenfläche ABS ist dann:

$$\vec{n}_{ABS} = \vec{b} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor auf ACS:

$$\vec{n}_{ACS} = \vec{c} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Sollen die beiden Flächen senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren null sein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} = 0$$

Das bedeutet:

$$\frac{1}{2}a^2h^2 - \frac{3}{36}a^4 = 0$$
$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{6}{36}$$
$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Aufgeschrieben und gelöst von MontyPythagoras

Lösung 081223:

Wähle

$$b_1 = \cdots = b_6 = 1, \quad a_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$a_4 = -a_3, \quad a_5 = -a_2 \text{ und } a_6 = -a_1$$

Dann ist

$$(x^2 + a_ix + b_i)(x^2 + a_{7-i}x + b_{7-i}) = (x^2 + 1 + a_ix)(x^2 + 1 - a_ix) = x^4 + (2 - a_i^2)x^2 + 1$$

also

$$\begin{aligned}
T &:= (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3)(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6)\\
&= \left(x^4+\left(2-(2+\sqrt{3})\right)x^2+1\right)\cdot\left(x^4+(2-2)\,x^2+1\right)\cdot\left(x^4+\left(2-(2-\sqrt{3})\right)x^2+1\right)\\
&= \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^4+1-\sqrt{3}x^2\right)\cdot\left(x^4+1+\sqrt{3}x^2\right)\\
&= \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8+2x^4+1-3x^4\right)=\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8-x^4+1\right)\\
&= x^{12}+x^8-x^8-x^4+x^4+1=x^{12}+1
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Es ist $x^{24}-1=(x^{12}-1)(x^{12}+1)$. Also sind die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ genau diejenigen von $x^{24}-1$, die keine Nullstellen von $x^{12}-1$ sind.

Die komplexen Nullstellen von x^n-1 lauten $\zeta_n^k=\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$, wobei i die ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft.

Damit erhalten wir die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ als

$$x_k=\zeta_{24}^{2k-1}=\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$

(Die vierundzwanzigsten Einheitswurzeln mit geradem k sind gleichzeitig auch zwölfte Einheitswurzeln, also Nullstellen von $x^{12}-1$, die hier ausgeschlossen sein sollen.)

Wir erhalten als Zerlegung des Polynoms $x^{12}+1$ in seine Linearfaktoren die Darstellung

$$x^{12}+1=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\ldots(x-x_{12})$$

Wegen $\cos(2\pi-\phi)=\cos(-\phi)=\cos(\phi)$ und $\sin(2\pi-\phi)=\sin(-\phi)=-\sin(\phi)$ können wir nun den ersten und letzten dieser komplexen Linearfaktoren, den zweiten und vorletzten, usw., zusammenfassen: Für ein k aus $\{7;8;\ldots;12\}$ gilt

$$\begin{aligned}
(x-x_k)(x-x_{13-k}) &= \left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)-i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)\\
&\quad\cdot\left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)\\
&= x^2-2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+\cos^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+\sin^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\\
&= x^2-2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+1
\end{aligned}$$

was nun ein rein reelles quadratisches Polynom ist. Setzt man $a_k:=-2\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$, erhält man genau die oben genannten Werte.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081224:

Für die linke Seite der Gleichung gilt:

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4|=\pm(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)$$

Und für die rechte Seite:

$$|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|=\pm(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$$

Somit folgt aus der Ausgangsgleichung

Fall 1: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ oder

Fall 2: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = -(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

Wir ermitteln nun, für welche (nicht ganzzahligen) Werte x die Terme

$$a = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4) \qquad \text{und} \qquad b = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

das gleiche oder unterschiedliche Vorzeichen haben, also für welche Werte x Fall 1 oder Fall 2 zu betrachten ist.

	$x < -4$	$-4 < x < -3$	$-3 < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$
a	> 0	> 0	< 0	< 0	> 0	> 0
b	> 0	< 0	< 0	> 0	> 0	> 0
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 1

	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < 4$	$x > 4$
a	> 0	< 0	< 0	> 0
b	< 0	< 0	> 0	> 0
	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1

Ausmultiplizieren liefert

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \quad \text{und}$$

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$$

Fall 1: Zu lösen ist

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^3 - 28x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^3 - 7x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \sqrt{7} \text{ oder } x = -\sqrt{7}$$

$x_0 = 0$ ist offenbar eine Lösung der Ausgangsgleichung. Für $x_1 = \sqrt{7}$ gilt $2 < x_1 < 3$. x_1 liegt somit in einem Bereich, für den Fall 1 zuständig ist (siehe Tabelle) und ist somit eine Lösung. Auch $x_2 = -\sqrt{7}$ ist wegen $-3 < x_2 < -2$ eine Lösung.

Fall 2: Zu lösen ist

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = -x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 14x - 24 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^4 - 26x^2 + 48 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^4 - 13x^2 + 24 = 0 \quad \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$$

$$\text{oder } x = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$$

Für $x_3 = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$ gilt $x_3 < \sqrt{\frac{13+\sqrt{81}}{2}} = \sqrt{11} < 4$ und $x_3 > \sqrt{\frac{13+\sqrt{64}}{2}} = \sqrt{10,5} > 3$. Somit liegt x_3 im Fall-2-Bereich und ist daher eine Lösung der Ausgangsgleichung.

Analog folgt mit $x_4 = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$, $x_5 = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$ und $x_6 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$, dass $-4 < x_4 < -3$, $1 < x_5 < 2$ und $-2 < x_6 < -1$ und daher x_4, x_5 und x_6 Lösungen der Ausgangsgleichung sind.
Insgesamt haben wir also sieben Lösungen x_0,...,x_6.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 081225:

Für alle reellen Zahlen x, y ist $x^3 - y^3 = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$, also $x - y = \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$. Mit $x = \sqrt[3]{4}$ und $y = \sqrt[3]{3}$ für die linke und $x = \sqrt[3]{3}$ sowie $y = \sqrt[3]{2}$ für die rechte Seite der zu zeigenden Ungleichung geht diese äquivalent über in

$$\frac{4-3}{\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2} < \frac{3-2}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

also

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

was aufgrund der strengen Monotonie der dritten Wurzel und $16 > 9$; $12 > 6$ und $9 > 4$ eine wahre Aussage ist. Damit ist die Ungleichung aus der Aufgabenstellung gezeigt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081226:

Es sei $|AB| = a$, $|CD| = b$, $AB \parallel CD$ und S der Schnittpunkt von AD sowie BC. Weiterhin sei F_T der Flächeninhalt des Trapezes, F_{SAB} der des Dreiecks $\triangle SAB$ und F_{SCD} der des Dreiecks $\triangle SCD$. Dann gilt $F_{SAB} = F_T + F_{SCD}$.

Nach dem Strahlensatz gilt $F_{SCD} = F_{SAB} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$, also $F_T = F_{SAB} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = F_{SAB} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

Es ist $F_T = d \cdot \frac{a+b}{2}$, da $\frac{a+b}{2}$ die Länge der Mittellinie des Trapezes und d der Abstand der Parallelen ist. Also ist

$$\frac{d}{2} = F_{SAB} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2 \cdot (a+b)} = F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2}$$

Andererseits ist $F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot (|AS| + |BS| + a) \cdot \frac{d}{2}$. Dies ergibt sich daraus, dass der Inkreis des Trapezes auch gleichzeitig einer des Dreiecks $\triangle SAB$ ist. Zeichnet man die Verbindungen des Inkreismittelpunkts zu den Eckpunkten des Dreiecks und die Berührungsradien auf die drei Seiten ein, wird das Dreieck $\triangle SAB$ in insgesamt sechs rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren eine Katheten jeweils ein Radius des Inkreises sind, und deren andere Katheten genau den Umfang des Dreiecks zerlegen.

Setzt man hierin den zuvor erhaltenen Term für $\frac{d}{2}$ ein und kürzt durch F_{SAB}, erhält man

$$1 = \frac{1}{2} \cdot (|AS| + |BS| + a) \cdot \frac{a-b}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2a^2}{a-b} = a + |AS| + |BS|$$

also

$$|AS| + |BS| = \frac{2a^2}{a-b} - a = \frac{a^2+ab}{a-b} = a \cdot \frac{a+b}{a-b}$$

und

$$(|AS| + |BS|)^2 = |AS|^2 + |BS|^2 + 2 \cdot |AS| \cdot |BS| = a^2 \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle SAB$ gilt $a^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos\alpha$. Die Differenz der letzten beiden Identitäten liefert

$$2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot (1 + \cos\alpha) = a^2 \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1\right) = a^2 \cdot \frac{4ab}{(a-b)^2}$$

also

$$F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Damit erhält man

$$d = 2F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist, lässt sich das Ergebnis auch schreiben als

$$d = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix