8. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 081231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x+a)(x-2a)} \text{ erfüllen!}$$

Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 081232:

a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2+7n+1} - 5n$, streng monoton fallend ist.

b) Beweisen Sie, daß alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind.

Aufgabe 081233:
Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.

a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.

   Beweisen Sie! Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.

   Beweisen Sie! Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 081234:
Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden. Während im Jahre 1950 noch 92 760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13 777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wieviel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit entspricht)?

b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d.h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?

c) Mit wieviel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

Aufgabe 081235:

Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.

(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.

(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.

(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.

(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, daß von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.

Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

Aufgabe 081236:

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081231:

Damit die Brüche definiert sind, müssen die Nenner verschieden von Null sein. Also gilt $a \neq 0$, $x \neq -a$ und $x \neq 2a$. Unter diesen Bedingungen geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner über in

$2x(x-2a) + a(x+a) = 4x + 6 - a$ bzw.

$$0 = 2x^2 - 4ax + ax + a^2 - 4x - 6 + a = 2x^2 - (3a+4)x + (a^2 + a - 6)$$

Diese quadratische Gleichung in x hat die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3a+4}{4} \pm \sqrt{\frac{(3a+4)^2}{16} - \frac{8 \cdot (a^2+a-6)}{16}} = \frac{3a+4 \pm \sqrt{9a^2+24a+16-8a^2-8a+48}}{4} =$$

$$= \frac{3a+4 \pm \sqrt{a^2+16a+64}}{4} = \frac{3a+4 \pm (a+8)}{4}$$

Es ergibt sich

$$x_1 = \frac{3a+4-(a+8)}{4} = \frac{2a-4}{4} = \frac{a}{2} - 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3a+4+a+8}{4} = a+3$$

Es sind hierbei noch die auftretenden Scheinlösungen auszuschließen, die eine der drei Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$ bzw. $x \neq 2a$ nicht erfüllen.

1. Fall: $x_1 = -a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = -a$ bzw. $a - 2 = -2a$, also $a = \frac{2}{3}$.

2. Fall: $x_2 = -a$. Dann ist $a + 3 = -a$, also $a = -\frac{3}{2}$.

3. Fall: $x_1 = 2a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = 2a$ bzw. $a - 2 = 4a$, also $a = -\frac{2}{3}$.

4. Fall: $x_2 = 2a$. Dann ist $a + 3 = 2a$, also $a = 3$.

Für alle anderen reellen Werte von a sind genau die beiden Werte $x_1 = \frac{a}{2} - 1$ und $x_2 = a + 3$ Lösungen der Ausgangsgleichung, die genau für $a = -8$ zusammenfallen und sonst voneinander verschieden sind.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081232:

Die Folge a_n ist streng monoton fallend genau dann, wenn es auch die Folge $b_n = a_n - \frac{7}{10}$ auch ist. Dabei ist

$$b_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - \left(5n + \frac{7}{10}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{25n^2+7n+1} - \left(5n+\frac{7}{10}\right)\right) \cdot \left(\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}\right)}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}} = \frac{(25n^2+7n+1) - \left(5n+\frac{7}{10}\right)^2}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

$$= \frac{(25n^2+7n+1) - \left(25n^2+7n+\frac{49}{100}\right)}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

$$= \frac{\frac{51}{100}}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

Da der Zähler dieses Bruchs konstant, der Nenner aber eine in n streng monoton wachsende Funktion ist, ist die Folge b_n – und mit ihr auch die Folge a_n streng monoton fallend. Darüber hinaus sind für alle n Zähler und Nenner von b_n offensichtlich positiv, sodass für alle n $b_n > 0$ und $a_n = b_n + \frac{7}{10} > \frac{7}{10}$ folgt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081233:

a) Für einen Berührungspunkt B eines Kreises k, der die Sehne P_1P_2 enthält (und für den also g eine Sekante ist, die auch den Punkt Q enthält) mit der Tangente durch Q gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz $|BQ|^2 = |QP_1| \cdot |QP_2|$. Insbesondere ist die rechte Seite dieser Gleichung konstant und nicht vom betrachteten Kreis k abhängig. Damit liegen alle diese Berührungspunkte für alle solche Kreise k auf einem Kreis um Q mit Radius $\sqrt{|QP_1| \cdot |QP_2|}$.

b) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt B, der auf beiden Kreisen nach Aufgabenteil a) um Q_1 bzw. Q_2 liegt. Dabei sind zur Lage des Punktes B zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: B liegt nicht auf g. Dann gibt es genau einen Kreis, der die drei Punkte B, P_1 und P_2 enthält. Sein Mittelpunkt sei M. Nach Aufgabenteil a) berühren aber sowohl die Gerade Q_1B als auch Q_2B den Kreis k in B und stehen somit senkrecht auf MB. Da es nur eine solche Orthogonale zu MB durch B gibt, müssen die beiden Geraden Q_1B und Q_2B identisch sein, ihre Schnittpunkte mit g aber auch. Da B nicht auf g liegt, ist dieser Schnittpunkt aber eindeutig bestimmt, sodass $Q_1 = Q_2$ entgegen der Voraussetzung folgen würde, was ein Widerspruch ist.

Fall 2: B liegt auf g. Es seien $r_1 = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|}$ und $r_2 = \sqrt{|Q_2P_1| \cdot |Q_2P_2|}$ die Radien der beiden Kreise. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

Fall 2.1: Q_1 und Q_2 liegen auf verschiedenen Seiten von P_1P_2. O.B.d.A. gelte $|Q_1P_1| < |Q_1P_2|$. Dann ist $r_1 < \sqrt{|Q_1P_2| \cdot |Q_1P_2|} = |Q_1P_2| < |Q_1Q_2|$. Analog ist auch $r_2 < |Q_1Q_2|$. Damit muss jeder Schnittpunkt B beider Kreise auf g zwischen ihnen liegen.

Dann ist

$$|Q_1Q_2| = |Q_1B| + |Q_2B| = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|} + \sqrt{|Q21P_1| \cdot |Q_2P_2|} <$$

$$< \frac{1}{2} \cdot (|Q_1P_1| + |Q_1P_2| + |Q_2P_1| + |Q_2P_2|) = |Q_1M| + |MQ_2| = |Q_1Q_2|$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 2.2.: Q_1 und Q_2 liegen auf der gleichen Seite von P_1P_2. O.B.d.A. liegen die Punkte dann in der Reihenfolge Q_2, Q_1, P_1, P_2 auf g. Es ist dann wegen $|P_1Q_2| > |P_1Q_1|$ und $|P_2Q_2| > |P_2Q_1|$ auch $r_2 > r_1$. Insbesondere kann dann nicht B "vor" Q_2 liegen, da dann $r_1 = |BQ_1| = |BQ_2| + |Q_1Q_2| > r_2$ gelten müsste, was ein Widerspruch ist. Auch kann B nicht auf der Strecke Q_2Q_1 liegen, da sonst der Widerspruch durch $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2B| + |BQ_1| = |Q_2Q_1| < |Q_2P_1|$ folgen würde.

Also muss B auf g "nach" Q_1 liegen. Da $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2P_2|$ gilt, liegt der einzige Schnittpunkt des

Kreises um Q_2 mit g, der "nach" Q_1 liegt, auf der Strecke P_1P_2. Dieser hat die Entfernung $r_2 - |Q_2P_1|$ von P_1. Analog hat der Schnittpunkt des Kreises um Q_1 mit g, der "nach" Q_1 auf g liegt, die Entfernung $r_1 - |Q_1P_1|$ von P_1. Damit B als Schnittpunkt dieser beiden Kreise an der angegebenen Stelle existiert, müssen diese Werte gleich sein.

Es seien x und t positive reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion $f_t(x) := \sqrt{x \cdot (t+x)} - x$. Dann ist die Entfernung des zu betrachtenden Schnittpunktes des Kreises um Q_2 mit g von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ und analog die des Schnittpunktes des Kreises um Q_1 von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$. Es genügt also für die Nichtexistenz eines gemeinsamen Schnittpunktes B beider Kreise auf g zu zeigen, dass für konstantes $t > 0$ die Funktion $f_t(x)$ streng monoton für alle $x > 0$ ist.

Es ist dabei $f_t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} - 1$. Um die strenge Monotonie für $f_t(x)$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass für die zu betrachtenden positiven Werte von x stets auch $f_t'(x) > 0$ ist. Für $x = t$ ist dies jedenfalls der Fall, denn $f_t'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3t}{\sqrt{t \cdot 2t}} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 > 0$. Die letzte Ungleichung sieht man dadurch ein, dass man sie äquivalent zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} > 1$ bzw. $3 > 2\sqrt{2}$ und schließlich der offensichtlich wahren Ungleichung $9 > 4 \cdot 2 = 8$ umformt.

Wäre $f_t(x)$ nicht streng monoton für alle $x > 0$, so müsste es also aufgrund der Stetigkeit von $f_t'(x)$ mindestens eine Nullstelle dieser Funktion geben. Es ist aber die Gleichung $f_t'(x) = 0$ äquivalent zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} = 1$ bzw. $2x + t = 2\sqrt{x \cdot (t+x)}$, woraus

$$4x^2 + 4xt + t^2 = (2x+t)^2 = 4x(t+x) = 4x^2 + 4xt$$

also $t^2 = 0$ und damit $t = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Damit hat $f_t'(x)$ für alle $t > 0$ keine Nullstellen, ist $f_t(x)$ streng monoton und nimmt also für verschiedene Argumente x auch verschiedene Funktionswerte an. Insbesondere sind also wegen $P_1 \neq P_2$ und $Q_1 \neq Q_2$ auch $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$ und $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ verschieden, sodass die beiden Kreise gemäß Teilaufgabe a) um Q_1 bzw. Q_2 keinen gemeinsamen Punkt auf g, und damit auch auf ganz ϵ, besitzen, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081234:

a) Es sei q der (als konstant angenommene) Quotient der Anzahl der Krankheitsfälle in einem Jahr bezogen auf die des Vorjahres.

Dann gilt aufgrund der Aufgabenstellung $92760 \cdot q^{16} = 13777$ bzw. $q = \sqrt[16]{\frac{13777}{92760}}$. Mit einem Taschenrechner erhält man $q \approx 0.8876$, sodass die Anzahl der Krankheitsfälle im Schnitt pro Jahr um ca. 11.24% zurückgegangen ist.

Bemerkung: Als diese Aufgabe gestellt wurde, waren Taschenrechner noch nicht verfügbar, wohl aber Logarithmentafeln.

An diesen liest man leicht $\lg(1.3777) \approx 0.139$ und $\lg(9.2670) \approx 0.967$ ab, woraus man $\lg\left(\frac{13777}{92760}\right) \approx 0.139 - 0.967 = -0.828$ und damit $\lg(q) \approx -\frac{0.828}{16} \approx -0.052$ erhält. Wieder kann man an einer solchen Tafel den Wert $10^{1-0.052} = 10^{0.948} \approx 8.872$ ablesen, was auf $q \approx 0.8872$ führt. Die Rechnung wird natürlich genauer, wenn man nicht nur drei-stellige Mantissen, wie hier angenommen, zur Verfügung hat. Es stellt sich auch die Frage, für welche Werte die Tabellen vorlagen...

b) Für die Halbwertszeit t, gemessen in Jahren, gilt $q^t = \frac{1}{2}$, also $t \cdot \lg(q) = -\lg(2)$ bzw. $t = -\frac{\lg(2)}{\lg(q)} \approx 5.8$, sodass knapp alle Jahre eine Halbierung der Anzahl der Krankheitsfälle eintritt.

c) Nimmt man weiter eine gleichbleibende prozentuale Verringerung der Krankheitsfälle pro Jahr an, so sinkt deren Anzahl von 1966 bis 1970 um den Faktor q^4, sodass man dann etwa noch ca. $13777 \cdot 0.8876^4 \approx 8500$ Krankheitsfälle erwartet.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 081235:

Die Aussagen 1) und 4) können nicht beide gleichzeitig erfüllt sein, da es höchstens eine Kante mit Länge des Kugeldurchmessers geben kann.

Eine Pyramide mit der rechtwinkligen Grundfläche mit den Seiten $3; 4; 5$ und einer Höhe $2,5$, wobei die Spitze über dem Mittelpunkt der Hypotenuse liegt, erfüllt die Bedingungen 1), 2), 5) und 6).

Diese hat das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\frac{3\cdot 4}{2} \cdot 2,5 = 5$. Streckung um den Faktor 2 ergibt eine Pyramide mit den Volumen 40 und den Grundkanten $6; 8; 10$. Die anderen Kanten sind gleichlang, da die Spitze direkt über dem Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche liegt und haben die Länge $5\sqrt{2}$.

Dieses lässt sich leicht an dem gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck bestehend aus der Hypotenuse und der Spitze ablesen.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 081236:

Unter Verwendung von

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$$

sowie

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

wird die Ausgangsgleichung zu

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x) = a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)\right)$$

woraus sich unmittelbar

$$\sin^2(2x) = \frac{4(a-1)}{2a-3} \tag{1}$$

und wegen $0 \le \sin^2(2x) \le 1$ die Bedingung $\frac{1}{2} \le a \le 1$ für a ergibt. Speziell für $a = \frac{5}{6}$ ist (1) dann äquivalent zu

$$\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit den offensichtlichen Lösungen

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgeschrieben und gelöst von weird