# 8. Mathematik Olympiade
# 4. Stufe (DDR-Olympiade)
# Klasse 12
# Saison 1968/1969

Aufgaben und Lösungen

# 8. Mathematik-Olympiade
# 4. Stufe (DDR-Olympiade)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 081241:

Jeder nichtnegative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $p/q$ dargestellt werden kann ($p$ und $q$ natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0$, $q > 0$). Nun seien $a_1$, $a_2$, $a_3$ und $a_4$ Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.

Beweisen Sie!

Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0,a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4...\\ z_2 &= 0,\overline{a_4a_1a_2a_3}\\ z_3 &= 0,\overline{a_3a_4a_1a_2}\\ z_4 &= 0,\overline{a_2a_3a_4a_1} \end{aligned}$$

haben in der obigen Darstellung $p/q$ stets gleiche Nenner.

## Aufgabe 081242:

In einer Ebene $\varepsilon$ liege ein Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r$. Als "Spiegelung am Kreis $k$" bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus $\varepsilon$ ein Punkt $P'$ aus $\varepsilon$ zugeordnet wird:

(1) $P'$ liegt auf dem von $M$ ausgehenden und durch $P$ verlaufenden Strahl.

(2) Es ist $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.

a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von $k$ gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt $P'$!

b) Es sei ein weiterer Kreis $k_1$ beliebig gegeben, jedoch so, daß $M$ außerhalb von $k_1$ liegt.

Konstruieren Sie $k_1'$, d.h. die Menge aller Spiegelpunkte $P'$ der Punkte $P$ von $k_1$!

## Aufgabe 081243:

Eine Menge $M$ von Elementen $u$, $v$, $w$ heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar $(u, v)$ von Elementen aus $M$ eindeutig ein Element $w$ aus $M$ zuordnet (man schreibt $u \otimes v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d.h. wenn für alle Elemente $u, v, w$ aus $M$ gilt:

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

Es sei nun $c$ eine positive reelle Zahl, und es sei $M$ die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als $c$ sind. Für je zwei Zahlen $u, v$ aus $M$ werde definiert:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} .$$

Man untersuche

a) ob $M$ eine Halbgruppe ist;

b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

Aufgabe 081244:
Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3\,! \end{aligned}$$

Aufgabe 081245:
Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen $x$ gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) .$$

Aufgabe 081246:
Es seien $n$ eine positive ganze Zahl, $h$ eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade $n$, das keine reellen Nullstellen besitzt.

Man beweise, daß dann auch das Polynom

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + \cdots + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat!

# 8. Mathematik-Olympiade
# 4. Stufe (DDR-Olympiade)
# Klasse 12
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 081241:

Für Ziffern $a, b, c, d \in \{0, 1, ..., 9\}$ bezeichnen wir mit $[abcd]$ die (bis zu) vierstellige Zahl

$$[abcd] := 1000a + 100b + 10c + d$$

Dann ist $10000z_1 - z_1 = [a_1a_2a_3a_4]$, also $z_1 = \frac{[a_1a_2a_3a_4]}{9999}$. Entsprechend ist $z_2 = \frac{[a_4a_1a_2a_3]}{9999}$, $z_3 = \frac{[a_3a_4a_1a_2]}{9999}$ und $z_4 = \frac{[a_2a_3a_4a_1]}{9999}$. Diese vier Brüche haben jetzt zwar denselben Nenner, jedoch liegen sie noch nicht unbedingt in gekürzter Form vor.

Die Primfaktorzerlegung der Nenner der vier Brüche lautet $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Also lassen sich hier bestenfalls die Faktoren 3, (oder sogar 9), 11 und 101 kürzen.

Bekanntlich ist eine ganze Zahl genau dann durch 3 (bzw. 9) teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 (bzw. 9) teilbar ist. Die Quersumme der vier Zähler ist jedoch identisch, also lässt sich bei allen vier Brüchen entweder 3 oder 9 oder keins von beiden kürzen.

Ebenfalls ist allgemein bekannt, dass eine ganze Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Quersumme der Zahl durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme der Zähler lautet hier $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ bzw. das Negative von diesem Wert. Also gilt auch hier: Entweder sind alle vier Zähler durch 11 teilbar oder keiner der Zähler. Und daher: Entweder lassen sich alle vier Brüche durch 11 kürzen oder keiner.

Schließlich gilt für $x := [abcd]$, dass $x$ genau dann durch 101 teilbar ist, wenn $a = c$ und $b = d$. (Begründung: Wenn $[abcd] = 101y$, dann ist $y < 100$ und damit $y = 10e + f$ für gewisse $e, f \in \{0, 1, ..., 9\}$ und daher $101y = [efef]$). Nach Voraussetzung ist jedoch der Fall, dass $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$ ausgeschlossen, also ist keiner der vier Zähler durch 101 teilbar und daher bei keinem der vier Brüche der Faktor 101 kürzbar.

Zusammenfassend: Bei keinem der vier Brüche $z_1, z_2, z_3, z_4$ lässt sich in obiger Darstellung der Faktor 101 kürzen, und die Faktoren 3 (bzw. 9) und 11 lassen sich in allen oder in keinem der Brüche kürzen. Somit besitzen alle vier Brüche in gekürzter Darstellung denselben Nenner.

*Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf*

Lösung 081242:

a) Man zeichne die Gerade $s$ durch $M$ und $P$. Die Orthogonale zu $s$ durch $M$ schneide $k$ in $C$ und $C'$. Die Orthogonale zu $CP$ schneide $s$ in $Q$. Die Spiegelung von $Q$ an $M$ ist dann $P'$.

   *Begründung:*

   Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle QPC$ rechtwinklig in $C$ und $QM$ seine Höhe auf die Hypotenuse $QP$. Dann gilt nach dem Höhensatz $|QM| \cdot |MP| = |MQ|^2 = r^2$. Spiegelt man $Q$ nun noch an $M$, so liegen dessen Spiegelpunkt $P'$ und $P$ auf $s$ auf der gleichen Seite von $M$, also $P'$ auf dem von $M$

ausgehenden und durch $P$ verlaufenden Strahl. Weiterhin ist $|MP'|$, also $|MP|\cdot|MP'| = |MP|\cdot|MQ| = r^2$, wie gewünscht.

b) Es sei $M_1$ der Mittelpunkt von $k_1$. Ist dieser nicht gegeben, so kann man ihn sich leicht als Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks auf $k_1$ durch Schnitt von zwei der drei zugehörigen Mittelsenkrechten erhalten.

Da $M$ außerhalb von $k_1$ liegt, kann man die durch $M$ verlaufenden Tangenten $t_1$ und $t_2$ an $k_1$ konstruieren. Dazu schneide man den Kreis um den Mittelpunkt der Strecke $MM_1$ und dem Durchmesser $MM_1$ mit $k_1$ und erhalte die Berührungspunkte $B_1$ und $B_2$. Die Geraden $MB_1$ und $MB_2$ sind dann die gesuchten Tangenten $t_1$ bzw. $t_2$ an $k_1$.

*Begründung zur Tangentenkonstruktion:*

Nach Konstruktion und Satz von Thales sind die Dreiecke $\triangle MM_1B_1$ und $\triangle MM_1B_2$ rechtwinklig, da $B_1$ und $B_2$ auf dem Kreis mit Durchmesser $MM_1$ liegen. Also sind die Geraden $MB_1$ und $B_1M_1$ bzw. $MB_2$ und $B_2M_1$ jeweils senkrecht zueinander. Dabei sind $B_1M_1$ und $B_2M_1$ Radien, auf die die Geraden $MB_1$ bzw. $MB_2$ in den Punkten auf der Kreislinie senkrecht stehen. Die Geraden $MB_1$ und $MB_2$ berühren also $k_1$ in $B_1$ bzw. $B_2$, sind demnach Tangenten an $k_1$ und verlaufen durch $M$.

*Weiter zur Konstruktion:*

Man konstruiere gemäß Teilaufgabe a) die Spiegelpunkte $B_1'$ von $B_1$ und $B_2'$ von $B_2$, errichte auf $t_1$ die Senkrechte durch $B_1'$, auf $t_2$ die Senkrechte durch $B_2'$ und bezeichne deren Schnittpunkt als $M'$. Abschließend konstruiere man den Kreis $k_1'$ um $M'$ durch $B_1'$.

*Begründung:*

Da alle Punkte auf $k_1$ im von $t_1$ und $t_2$ aufgespannten Winkel mit Scheitelpunkt $M$ liegen, muss dies analog für $k_1'$ auch gelten, da ja auch alle von $M$ ausgehenden und durch Punkte von $k_1$ verlaufenden Strahlen in diesem Winkel liefen.

Da $t_1$ sowie $t_2$ jeweils nur einen Punkt mit $k_1$ gemeinsam haben, muss das für $k_1'$ auch gelten. Setzen wir hier voraus, dass das Bild eines Kreises $k_1$, der nicht durch $M$ verläuft, wieder ein Kreis ist, erhält man dessen Mittelpunkt also dadurch, dass man die Orthogonalen durch die konstruierten Berührungspunkte an den Tangenten schneidet.

Es bleibt zu zeigen, dass $k_1'$ tatsächlich das Bild von $k_1$ ist. Sei dazu $P$ ein von $B_1$ und $B_2$ verschiedener Punkt auf $k_1$ und $Q$ der zweite Schnittpunkt des von $M$ ausgehenden Strahl $s$ durch $P$ mit $k_1$. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz bezogen auf den Kreis $k_1$ die Gleichung $|MP|\cdot|MQ| = |MB_1|^2$. Es seien $P'$ und $Q'$ die Spiegelpunkte von $P$ bzw. $Q$. Dann liegen diese beiden Punkte auch auf dem Strahl $s$ und es gilt $|MP|\cdot|MP'| = r^2 = |MQ|\cdot|MQ'|$, also

$$|MP'|\cdot|MQ'| = \frac{r^2}{|MP|}\cdot\frac{r^2}{|MQ|} = \frac{r^4}{|MP|\cdot|MQ|} = \frac{r^4}{|MB_1|^2} = \left(\frac{r^2}{|MB_1|}\right)^2 = |MB_1'|^2$$

Damit gilt nach der Umkehrung des Sekanten-Tangentensatz, dass die drei Punkte $P'$, $Q'$ und $B_1'$ auf einem Kreis liegen, für den die Gerade $MB_1'$ eine Tangente ist. Also liegen die Bilder aller Punkte von $k_1$ auf $k_1'$.

Da die Spiegelung an $k$ bei zweifacher Ausführung jeden Punkt wieder auf sich selbst abbildet und das Bild aller Punkte von $k_1'$ nach der gleichen Argumentation auf $k_1$ liegen muss, ist tatsächlich der gesamte Kreis $k_1'$ das Bild der Punkte des gesamten Kreises $k_1$.

*Aufgeschrieben und gelöst von cyrix*

Lösung 081243:

a) Zum Beweis der Abgeschlossenheit seien $u, v \in M$, also $0 \leq u < c$ und $0 \leq v < c$. Dann ist offensichtlich auch $u \otimes v$ als Quotient einer nichtnegativen reellen Zahl $u+v$ und einer positiven reellen Zahl $1+\frac{uv}{c^2} \geq 1+\frac{0\cdot 0}{c^2} = 1 > 0$ selbst nichtnegativ. Weiterhin ist

$$u \otimes v < c \Leftrightarrow \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} < c \Leftrightarrow cu+cv < c^2+uv \Leftrightarrow 0 < c^2-cu-cv+uv = (c-u)(c-v)$$

was offensichtlich wegen $u < c$ und $v < c$ wahr ist.

Für den Beweis der Assoziativität berechnen wir beide Terme:

$$\begin{aligned}(u \otimes v) \otimes w &= \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c}^2} \otimes w = \left(c^2 \cdot \frac{u+v}{c^2+uv}\right) \otimes w = c^2 \cdot \frac{c^2\frac{u+v}{c^2+uv}+w}{c^2+c^2\frac{u+v}{c^2+uv}\cdot w} \\ &= \frac{\frac{c^2(u+v)+c^2w+uvw}{c^2+uv}}{1+\frac{(u+v)w}{c^2+uv}} = \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+uv+uw+vw}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}u \otimes (v \otimes w) &= u \otimes \left(c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}\right) = c^2 \cdot \frac{u+c^2\cdot\frac{v+w}{c^2+vw}}{c^2+u\cdot c^2\cdot\frac{v+w}{c^2+vw}} = \frac{\frac{c^2\cdot u+uvw+c^2\cdot(v+w)}{c^2+vw}}{1+\frac{u(v+w)}{c^2+vw}} \\ &= \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+vw+uv+uw}\end{aligned}$$

sodass offenbar $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$ gilt. Damit ist $M$ bezüglich der Verknüpfung $\otimes$ eine Halbgruppe.

b) Es ist

$$\begin{aligned}u \otimes v_1 = u \otimes v_2 &\Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} = c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} \Leftrightarrow (u+v_1)(c^2+uv_2) = (u+v_2)(c^2+uv_1) \\ &\Leftrightarrow uc^2+u^2v_2+v_1c^2+uv_1v_2 = uc^2+u^2v_1+v_2c^2+uv_1v_2 \\ &\Leftrightarrow u^2(v_2-v_1)-(v_2-v_1)c^2 = (v_2-v_1)(u^2-c^2) = 0\end{aligned}$$

Da aber $u < c$ gilt, ist $u^2-c^2 \neq 0$, also $u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow v_2-v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$.

Weiterhin ist $\otimes$ kommutativ, da für alle $uv \in M$ die Beziehung

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = v \otimes u$$

gilt.

Insbesondere folgt also aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ sofort durch Ausnutzung der Kommutativität auf beiden Seiten der Gleichung $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$, und daraus – wie eben gezeigt – wieder $v_1 = v_2$.

Damit ist die (kommutative) Halbgruppe $(M, \otimes)$ regulär.

*Aufgeschrieben und gelöst von cyrix*

Lösung 081244:

Aufgrund der zweiten Gleichung haben beide Variablen das gleiche Vorzeichen. Wären beide negativ, so auch $x+y$. Dann wäre aber $\log_2(x+y)$ nicht definiert. Demnach sind sowohl $x$ als auch $y$ positiv. Damit $\log_2(x-y)$ definiert ist, muss $x > y$ gelten, also aufgrund der zweiten Gleichung dann $x+y > x > \sqrt{3}$. Damit ist $\log_2(x+y)$ stehts positiv und die Betragsstriche können entfallen.

Es verbleiben zwei Fälle:

*1. Fall:* $x - y \geq 1$.

Dann ist auch $\log_2(x-y) \geq 0$ und die erste Gleichung wird zu

$$3 = \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = \log_2(x^2 - y^2)$$

also $x^2 - y^2 = 8$ bzw. $x^4 - (xy)^2 = x^4 - 9 = 8x^2$, was mit der Substitution $t = x^2$ übergeht in die quadratische Gleichung $t^2 - 8t - 9 = 0$, die die Lösungen $4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5$ hat. Da $t = x^2 \geq 0$ ist, entfällt die negative Lösung $-1$ und es verbleibt $t = x^2 = 9$, also $x = 3$ und $y = 1$. Die Probe bestätigt, dass diese Variablenbelegung auch das Ausgangsgleichungssystem löst.

*2. Fall:* $x - y < 1$.

Dann ist $\log_2(x-y) < 0$, sodass die erste Gleichung übergeht in

$$3 = \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = \log_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

also $8 = \frac{x+y}{x-y}$ bzw. $x + y = 8(x-y)$, also $9y = 7x$ bzw. $y = \frac{7}{9}x$ und damit $3 = xy = \frac{7}{9}x^2$, welches auf $x^2 = 9 \cdot \frac{3}{7}$ und (wegen $x > 0$) auf $x = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}$ sowie $y = \frac{7}{9}x = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Zur Probe: Es ist $x \cdot y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{1}{7} \cdot 21 = 3$, sodass die zweite Gleichung erfüllt ist. Weiterhin ist

$$x + y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9+7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{16}{\sqrt{21}}$$

sodass man $\log_2(x+y) = \log_2(16) - \log_2(\sqrt{21}) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ erhält. Da $21 < 256$ ist, folgt $\frac{1}{2}\log_2(21) < \frac{1}{2}\log_2(256) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, sodass $|\log_2(x+y)| = \log_2(x+y) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ gilt.

Darüber hinaus ist $x - y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9-7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}$, sodass man

$$\log_2(x-y) = \log_2(2) - \log_2(\sqrt{21}) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(21)$$

erhält. Wegen $21 > 4$ ist $\frac{1}{2}\log_2(21) > \frac{1}{2}\log_2(4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, sodass $|\log_2(x-y)| = -\log_2(x-y) = \frac{1}{2}\log_2(21) - 1$ ist. Zusammen mit dem zuvor berechneten ist dann $|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21) - \frac{1}{2}\log_2(21) - 1 = 4 - 1 = 3$, sodass auch die zweite Gleichung von diesem Paar erfüllt wird.

Zusammen ergeben sich also genau zwei Lösungspaare, nämlich

$$(x,y) = (3,1) \quad \text{oder} \quad (x,y) = \left(\frac{3}{7} \cdot \sqrt{21}, \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21}\right)$$

*Aufgeschrieben und gelöst von cyrix*

Lösung 081245:

Es ist

$$\begin{aligned}
\sin 5x &= 5 \sin x \cos^{5-1} x - \binom{5}{3} \sin^3 x \cos^{5-3} x + \binom{5}{5} \sin^5 x \cos^{5-5} x \\
&= 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x \\
&= \sin x (5 \cos^4 x - 10(1 - \cos^2 x) \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2) \\
&= \sin x (5 \cos^4 x - 10 \cos^2 x + 10 \cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) = \sin x (16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1) \\
&= 16 \sin x \left(\cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x + \frac{1}{16}\right)
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos^4 x-\frac{3}{4}\cos^2 x+\frac{1}{16}$$

Für die linke Seite nutzen wir nun (zweimal) die Produktformel:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)-\cos(2x)\right)\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)-\cos(2x)\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(-2\cos^2 x+1+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(-2\cos^2 x+1+\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)\\
&=\cos^4 x-\frac{1}{2}\cos^2 x\left(2+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)+\\
&\quad\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+1\right)
\end{aligned}$$

Direkte Berechnung der Summe und des Produkts:

Das Produkt ist einfach und braucht nur die Doppelwinkelfunktion des Sinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)}{2\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=-\frac{1}{4}$$

Für die Summe braucht man zudem noch die Produktformel des Kosinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}=-\frac{1}{2}$$

Alternativ lassen sich Produkt und Summe auch über die Einzelwerte berechnen, welche Rainer Müller in 041244 verwendet. Im Gegensatz zu seiner Methode könnte man diese Werte wie folgt berechnen:

Es ist

$$\cos(72^\circ)=2\cos^2(36^\circ)-1=2\cos^2(144^\circ)-1=2(2\cos^2(72^\circ)-1)^2-1=8\cos^4(72^\circ)-8\cos^2(72^\circ)+1$$

Damit ist $t=\cos(72^\circ)$ Nullstelle von $8t^4+8t^2-t+1$.

Offensichtlich ist $t=1$ Nullstelle. Es folgt damit $8t^4+8t^2-t+1=(t-1)(8t^3+8t^2-1)$
Der zweite Faktor ist offensichtlich

$$8t^3+4t^2+4t^2-1=4t^2(2t+1)+(2t-1)(2t+1)=(2t+1)(4t^2+2t-1)$$

Die Kosinuswerte für $t=1$ und $t=-\frac{1}{2}$ sind bekannt. Damit muss $4t^2+2t-1$ der Faktor werden, welcher Null ergibt. Vom Verlauf der Kosinusfunktion weiß man, welche Nullstelle zu wählen ist.

*Aufgeschrieben und gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten*

*2. Lösungsweg:*

Es sei $z:=\cos x+i\sin x$ und es sei $\omega:=e^{\frac{i\pi}{5}}$. Dann ist $\omega^2$ eine primitive fünfte Einheitswurzel und somit gilt $u^5-1=(u-1)(u-\omega^2)(u-\omega^4)(u-\omega^{-2})(u-\omega^{-4})$ für alle $u\in\mathbb{C}$. Außerdem haben $z$ und $\omega$ beide Betrag 1, also gilt $\overline{z}=\frac{1}{z}$ und $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$.

Somit ist

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \operatorname{Im} z^5 = \frac{1}{2i}(z^5 - z^{-5}) \\ &= \frac{1}{2iz^5}(z^{10} - 1) = \frac{1}{2iz^5}((z^2)^5 - 1) \\ &= \frac{1}{2iz^5}(z^2 - 1)(z^2 - \omega^2)(z^2 - \omega^4)(z^2 - \omega^{-2})(z^2 - \omega^{-4}).\end{aligned}$$

Wegen

$$z^2 - \omega^{2k} = z\omega^k(z\omega^{-k} - z^{-1}\omega^k) = z\omega^k \cdot 2i\operatorname{Im}(z\omega^{-k}) = 2iz \cdot \omega^k \cdot \sin\left(x - \frac{k\pi}{5}\right),$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \frac{1}{2iz^5}(z^2 - 1)(z^2 - \omega^2)(z^2 - \omega^4)(z^2 - \omega^{-2})(z^2 - \omega^{-4}) \\ &= \frac{1}{2iz^5} \cdot (2iz)^5 \cdot \omega^{0+1+2-1-2} \cdot \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) \\ &= 16 \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon*

Lösung 081246:

*Anmerkung:* Diese Aufgabe ist mit der Aufgabe 101242 identisch.

Es ist unmittelbar klar, dass $F$ ebenfalls ein Polynom vom Grade $n$ mit reellen Koeffizienten ist.

Da $f$ keine reellen Nullstellen hat, muss $n$ gerade sein und es muss entweder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O.B.d.A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.

Da $F$ den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie $f$ hat, hat $F$ ein globales Minimum, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

*Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon*