9. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090711:

Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist!

O	N	G	A
W	G	F	L

Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge $W\ O\ L\ F\ G\ A\ N\ G$ übereinander liegen!

Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

Aufgabe 090712:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Darin sei die die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, daß diese sich im Innern des Dreiecks ΔABC, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.

Beweise, daß die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

Aufgabe 090713:

Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.

(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.

(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.

Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

Aufgabe 090714:

Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z.B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357 357).

Beweise, daß für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt:

> Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl!

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090711:

In der 3. und 4. Spalte liegt im Uhrzeigersinn die verlangte Buchstabenfolge $L\ F\ G\ A$ vor.

Damit L und F sowie A und G jeweils übereinander liegen, beginnt man, indem man $\begin{array}{c}A\\L\end{array}$ unter $\begin{array}{c}G\\F\end{array}$ faltet.

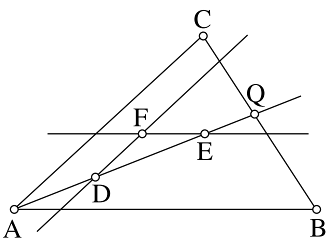
Um zu erreichen, daß G und F aufeinander liegen, faltet man $O\ N\ G$ (wobei A mitgeführt wird) auf $W\ G\ F$ (worunter L liegt). Nun liegen $O\ W$ daneben $N\ G$ sowie daneben $A\ G\ F\ L$ jeweils in dieser Reihenfolge untereinander. Die letztgenannten vier Buchstaben legt man um auf N (worunter G liegt), um $L\ F\ G\ A\ N\ G$ zu erhalten. Schließlich faltet man O (wobei W mitgeführt wird) auf L (worunter $F\ G\ A\ N\ G$ liegt) und erhält dadurch $W\ O\ L\ F\ G\ A\ N\ G$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090712:

In der Abb. sei p_1 die Halbierende des Innenwinkels bei A, p_2 eine Parallele zu AB und p_3 eine Parallele zu AC. Der Schnittpunkt von p_1, mit BC sei Q, der von p_1 mit p_2 sei E, der von p_1 mit p_3 sei D und der von p_2 mit p_3 sei F.

Da p_2, p_3 als Parallelen zu zwei Dreieckseiten nicht zueinander parallel sind und da p_1 als Halbierende eines Innenwinkels zu keiner Seite des Dreiecks parallel ist, existieren diese Schnittpunkte.



Nun liegt nach Voraussetzung F entweder (1. Fall) im Innern des Dreiecks ΔAQC oder (2. Fall) im Innern des Dreiecks ΔABQ. Im 1. Fall gilt $\sphericalangle CAD \simeq \sphericalangle FDE$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\sphericalangle DAB \simeq \sphericalangle FED$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).

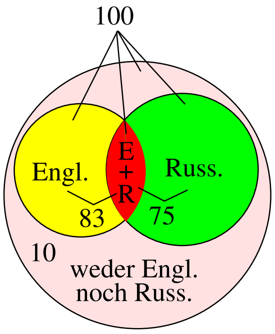
Im 2. Fall gilt entsprechend $\sphericalangle DAB \simeq \sphericalangle FED$ und $\sphericalangle CAD \simeq \sphericalangle FDE$.

(*Anmerkung:* Man kann auch den 2. Fall, statt ihn gesondert zu diskutieren, durch Umbenennung auf den 1. Fall zurückführen.)

Da laut Aufgabe $\sphericalangle CAD \simeq \sphericalangle DAB$ gilt, ist mithin in jedem Fall auch $\sphericalangle FDE \simeq \sphericalangle FED$. Das Dreieck ΔFED ist also gleichschenklig.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090713:



Aus (1) folgt: Genau 90 Touristen beherrschen mindestens eine der beiden Sprachen. Somit beherrschen nach (2) genau $(90 - 75)$ Personen der Gruppe Englisch, aber nicht Russisch, das sind 15 Personen.

Nach (3) beherrschen genau $(90-83)$ Personen der Gruppe Russisch, aber nicht Englisch, das sind 7 Personen.

Wegen $90 - 7 - 15 = 68$ folgt: Genau 68 Personen beherrschen beide Sprachen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090714:

Jede sechsstellige Zahl, die in der beschriebenen Weise entstehen kann, ergibt sich aus ihrer dreistelligen Ausgangszahl durch folgende Rechnung:

1. Die Ausgangszahl wird mit 1 000 multipliziert,
2. zum Ergebnis wird nochmals die Ausgangszahl addiert.

Daher ist die sechsstellige Zahl das 1 001-fache der Ausgangszahl. Aus ihr entsteht folglich bei Division durch 7 wegen $1001 : 7 = 143$ das 143-fache der Ausgangszahl. Wird dies durch 11 dividiert, so ergibt sich wegen $143 : 11 = 13$ das 13-fache der Ausgangszahl. Dividiert man dies durch 13, so erhält man die Ausgangszahl. Das war die Behauptung, diese ist damit bewiesen. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.