9. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090731:

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2 555, jede genau einmal, aufgeschrieben.

Ermittle die Anzahl der Ziffer 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müssten!

Aufgabe 090732:

Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

(I) $a + b = 38$,

(II) $b + c = 46$,

(III) $a + c = 42$

erfüllen.

Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen

a) die Maßzahl jeder Seitenlänge!

b) Weise nach, daß ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!

(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

Aufgabe 090733:

Beweise folgenden Satz!

Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen!

Aufgabe 090734:

Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.

a) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?

b) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

Aufgabe 090735:

Beweise folgenden Satz!

Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

Aufgabe 090736:

Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\overline{\sphericalangle BAD} = 110°$ und $\overline{AC} + \overline{BD} = 15\,\text{cm}$!

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle BAD}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$.

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090731:

I. In der Tausenderstelle der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Hunderterstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{für die Zahlen von 1 bis 1000}\\ \text{für die Zahlen von 1001 bis 2000}\end{array}\right\} \qquad \text{(2 Gruppen)}$$

je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen 1900, ..., 1999). Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Zehnerstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{für die Zahlen von 1 bis 100}\\ \text{für die Zahlen von 101 bis 200}\\ \text{u.s.w.}\\ \text{für die Zahlen von 2401 bis 2500}\end{array}\right\} \qquad \text{(25 Gruppen)}$$

je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten Gruppe genau in 190, ..., 199 u.s.w.). Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der Einerstelle der Zahlen beträgt

$$\left.\begin{array}{l}\text{für die Zahlen von 1 bis 10}\\ \text{für die Zahlen von 11 bis 20}\\ \text{u.s.w.}\\ \text{für die Zahlen von 2541 bis 2550}\end{array}\right\} \qquad \text{(255 Gruppen)}$$

je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einersteile die 9 nicht vor.

Daher beträgt die gesuchte Zahl $2 \cdot 100 + 25 \cdot 10 + 255 = 705$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090732:

a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt (durch irgendeine Eliminationsmethode, z.B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III))

$$a = 17, \quad b = 21, \quad c = 25.$$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksungleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich

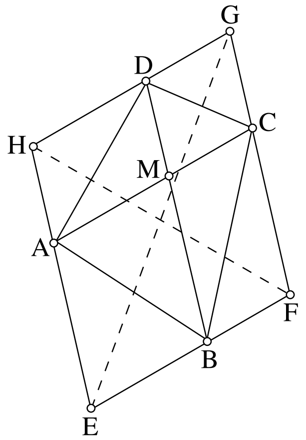
$$\begin{aligned} 17+21 &> 25, \quad \text{also} \quad a+b>c,\\ 21+25 &> 17, \quad \text{also} \quad b+c>a,\\ 17+25 &> 21, \quad \text{also} \quad a+c>b. \end{aligned}$$

Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III). Es ist nämlich

$$\begin{aligned} a+b &= 17+21 = 38,\\ b+c &= 21+25 = 46,\\ a+c &= 17+25 = 42. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090733:



Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D. Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden. Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme $AMDH$, $BMAE$, $CMBF$ und $DMCG$ zusammengesetzt ist.

Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ doppelt so groß wie der des Vierecks $ABCD$.

Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke ΔEFG, ΔEFH kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks $ABCD$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090734:

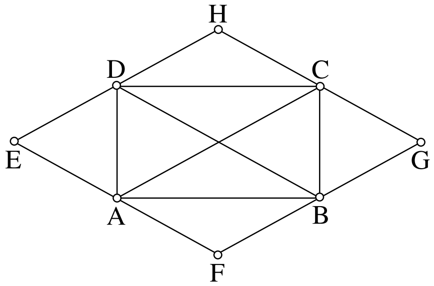
a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}m$.

Die Differenz ist $m - \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}m$. Wegen $\frac{3}{5}m = \frac{60}{100}m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.

b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m + \frac{2}{5}m = \frac{7}{5}m$. Wegen $\frac{7}{5}m = \frac{140}{100}m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090735:



Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck,

E, F, G, H sind so gelegen, daß A auf EF, B auf FG, C auf GH, D auf HE liegt

und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$ gilt.

Behauptung: $EFGH$ ist ein Rhombus.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $EFBD$ ein Parallelogramm, also gilt $\overline{EF} = \overline{DB}$. Ebenso erhält man: $\overline{HG} = \overline{DB}$, $\overline{FG} = \overline{AC}$, $\overline{EH} = \overline{AC}$.

Da im Rechteck $ABCD$ ferner $\overline{AC} = \overline{DB}$ gilt, folgt aus den vorigen Gleichungen $\overline{EH} = \overline{FG} = \overline{HG} = \overline{EH}$ und damit die Behauptung. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 090736:

I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $\overline{MB} = \overline{MD}$. Schließlich ist

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}).$$

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, daß $\overline{ME} = \overline{MB}$ ist. Dann ist ΔMBE gleichschenklig-rechtwinklig, also, $\sphericalangle MEB = 45°$. Ebenso ist auch $\sphericalangle MED = 45°$.

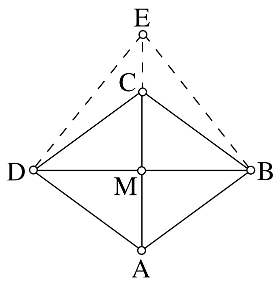
II. Daraus folgt, daß ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel von 110°, dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.

(2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von $7,5$ cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.

(3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.

(4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius $\overline{AD}$ den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.



III. Beweis, daß diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:

Nach Konstruktion wird $\Delta AEB \simeq \Delta AED$ (wsw), also $\overline{AB} = \overline{AD}$.

Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\Delta AMB \simeq \Delta AMD$ (sws), also $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DMA = 90°$.

Demnach gilt $\Delta DMA \simeq \Delta DMC$ (ssw; $\overline{AD} > \overline{MD}$), also $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AM} = \overline{CM}$ und somit schließlich $\Delta AMB \simeq \Delta CMB$ (sws), $\overline{AB} = \overline{CB}$.

Daher ist ABCD ein Rhombus.

In diesem gilt nach Konstruktion $\sphericalangle BAD = 110°$. Ferner ist $\sphericalangle BME = 90°$ und nach Konstruktion $\sphericalangle BEM = 45°$, also ΔMBE gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{BM} = \overline{EM}$. Somit auch

$$\overline{AC} + \overline{BD} = 2(\overline{AM} + \overline{BM}) = 2(\overline{AM} + \overline{EM}) = 2 \cdot \overline{AE} = 15\,\text{cm},$$

wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110°}{2} < 90°$ ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) ”a+b = b+a” - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.