9. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091041:

Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, daß jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

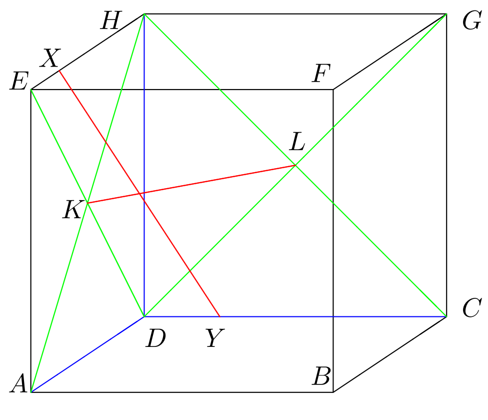
Aufgabe 091042:

Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ ermittle man alle Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

Aufgabe 091043 :

A, B, C, D, E, F, G, H seien die Eckpunkte eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abb. gewählt seien. K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $\overline{DY} = \overline{EX}$ ist.

Man beweise, daß der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.



Aufgabe 091044:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2 \cdot (x-1) + t \cdot (x+1) = 0$ sind, so gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1\,.$$

Aufgabe 091045:

Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks ΔABC, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von Dreieck ΔABC liegen.

Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck ΔABC entweder auf k' oder auf k'' liegt!

Aufgabe 091046:

Man beweise folgenden Satz!

Wenn in einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung keine rationale Lösung.

9. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091041:

Gesucht sind natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ und $p, q, r, s \in \mathbb{N}$, so dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b + 41 &= p^2 \\ a + b &= q^2 \\ a + 41 &= r^2 \\ b + 41 &= s^2 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Die Differenz der ersten beiden Gleichungen ergibt $41 = p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$. Da p, q natürliche Zahlen sind, ist die einzige Lösung $p + q = 41, p - q = 1 \iff p = 21, q = 20$ und somit $a + b = 400$.

Die beiden letzten Gleichungen ergeben direkt die Abschätzung $r, s \geq 7$. Durch Addition dieser erhalten wir $r^2 + s^2 = a + b + 82 = 482$, woraus $r, s \leq 20$ folgt. Die Endziffer einer Quadratzahl kann nur die Werte $0, 1, 4, 5, 6, 9$ annehmen.

Damit die Summe zweier Quadratzahlen die Endziffer 2 hat, sind für r^2, s^2 nur die Endziffern $1, 6$ und somit für r, s nur die Endziffern $1, 4, 6, 9$ möglich. Daher gilt $r, s \in \{9, 11, 14, 16, 19\}$ und man findet, dass $(r, s) = (11, 19)$ oder $(r, s) = (19, 11)$ gelten muss.

Dadurch ergeben sich $(a, b) = (80, 320)$ und $(a, b) = (320, 80)$ als einzige Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314, Nuramon, Kornkreis

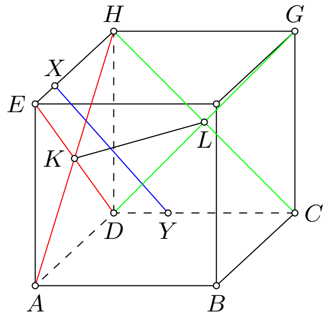
Lösung 091042:

Es gilt $\ln_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ und somit

$$\begin{aligned} &(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b \\ \iff &\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a} \\ \iff &\left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)^2 = (\log_b x)^2 = 1 \\ \iff &x = b \vee x = \frac{1}{b}\ . \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 091043:



Vektorielle Lösung:

Wir legen den Würfel in ein Koordinatensystem mit den Koordinaten $D = (0,0,0)^T$, $A = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)^T$, $H = (0,0,1)^T$.

Dann haben wir $K = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $L = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ und $X = (1,0,1) - r\cdot(1,0,0)^T$, $Y = r\cdot(0,1,0)^T$, $0 \le r \le 1$, wobei die beiden Faktoren der Richtungsvektoren wegen $|DY| = |EX|$ identisch sind.

Die Strecke $|KL|$ ist gegeben durch

$$|KL| = \left\{ s\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (1-s)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le s \le 1 \right\} \ .$$

Für den Mittelpunkt M der Strecke $|XY|$ gilt

$$M = \frac{1}{2}(X+Y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1-r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-r) \\ \frac{1}{2}(1-(1-r)) \\ \frac{1}{2}(1-r)+\frac{1}{2}(1-(1-r)) \end{pmatrix} \ ,$$

welcher mit $s = r - 1$ auf der Strecke $|KL|$ liegt.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 091044:

a, b, c sind die drei Nullstellen des normierten Polynoms $x^2\cdot(x-1) + \frac{t}{s}\cdot(x+1)$. Daher gilt

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^2(x-1) + \frac{t}{s}\cdot(x+1) \ .$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} -a-b-c &= -1 \\ ab+bc+ac &= \frac{t}{s} \\ -abc &= \frac{t}{s} \end{aligned}$$

und somit

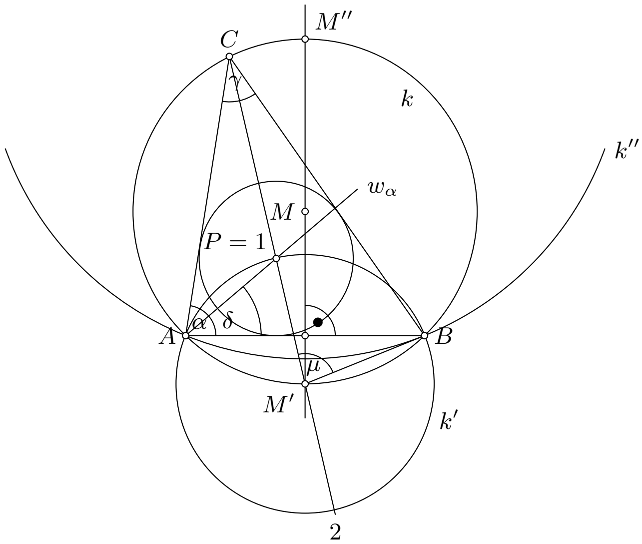
$$a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (a+b+c)\cdot\frac{ab+bc+ac}{abc} = 1\cdot\frac{\frac{t}{s}}{-\frac{t}{s}} = -1 \ .$$

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 091045:

Beweis : Zunächst zeichnet man eine Planfigur (siehe Abbildung) entsprechend den Vorgaben der Aufgabenstellung.

Der Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende w_γ ein. Diese schneidet k' in den Punkten 1 und 2.



Wenn die eingangs aufgestellte Behauptung wahr sein soll, dann muss der Punkt 1 mit dem Inkreismittelpunkt P identisch sein. Der Punkt 2 liegt außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ und scheidet deshalb von der Betrachtung aus.

Der geforderte Beweis ist also erbracht, wenn gezeigt wird, dass der Punkt 1 auf w_α oder w_β liegt.

γ ist ein Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne AB. Da M' nach Konstruktion den Kreisbogen $\widehat{AB}$ halbiert, gilt $AM' = M'B$. Somit liegt M' auf w_γ.

Wir setzen $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle CM'B = \mu$. Da α und μ Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne BC darstellen und in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Sehne liegen, gilt $\alpha = \mu$ (1)

Ferner setzen wir $\sphericalangle 1AB = \delta$. Nun sind δ ein Peripheriewinkel von k' und μ ein Zentriwinkel von k' bezüglich der gemeinsamen Sehne $B1$. Folglich gilt $\mu = 2\delta$ (2)

Aus (1) und (2) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\delta = \frac{\alpha}{2}$; d.h. die Verbindungslinie $(1A)$ liegt in der Winkelhalbierenden w_α.

Der auf k' liegende Punkt 1 ist also identisch mit dem Inkreismittelpunkt P, was zu beweisen war.

Hätte man C auf k im Inneren von k' angenommen, wäre der Beweis völlig analog gelaufen. Eine Fallunterscheidung erübrigt sich damit. □

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 091046:

Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Lösung $\frac{p}{q}$ mit ganzzahligen und teilerfremden p und q der quadratischen Gleichung. Einsetzen und multiplizieren mit q^2 liefert dann

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Wären p und q beide ungerade, dann auch ap^2, bpq und cq^2, da alle drei Koeffizienten nach Aufgabenstellung selbst ungerade sind. Also ist es auch die Summe dieser drei Produkte, was ein Widerspruch darstellt, da natürlich 0 gerade ist.

Wäre dagegen p gerade und q ungerade, so ist wieder cq^2 ungerade, aber ap^2 und bpq beide gerade, sodass die Summe wieder eine ungerade Zahl und damit nicht 0 ergibt. Widerspruch. Der analoge Widerspruch ergibt sich auch, wenn q gerade und p ungerade ist.

Und wären p und q beide gerade, so wären sie nicht mehr teilerfremd.

Also ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch zur Annahme der Existenz einer rationalen Lösung, sodass es keine rationale Lösung geben kann, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift