9. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091211:

Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, daß jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte. Ferner bemerkte man, daß je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten.

Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

Aufgabe 091212:

a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$ zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier bzw. mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

Aufgabe 091213:

Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung $a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist.

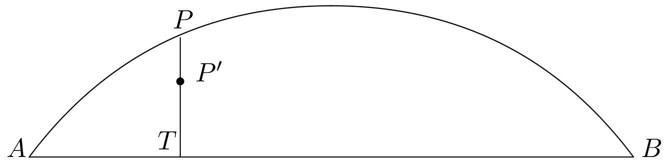
Anmerkung: a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$.

Aufgabe 091214:

In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere der beiden von A und B begrenzten Bögen eines Kreises vom Radius r) nach folgender Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($\overline{AT} = a$, $\overline{TB} = b$). Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$. Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leqslant \frac{1}{5}r$.

Es ist zu beweisen, daß dann der relative Fehler $\delta = \frac{|z - z'|}{z}$ stets kleiner als 0,0051, d.h. 5,1 ‰ ist.



9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091211:

Bezeichnet man die Anzahl der anwesenden Herren mit h, die der Damen mit d, so beträgt die Anzahl der an diesem Abend ausgeführten Tänze sowohl $3h$ als auch $2d$, so dass zwischen h und d die Beziehung

$$3h = 2d \tag{1}$$

besteht. Eine weitere folgt daraus, dass die Anzahl der Paare von Herren, nämlich $\frac{1}{2}(h-1)h$, mit der Anzahl der Damen übereinstimmt, also auch

$$\frac{1}{2}(h-1)h = d \tag{2}$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt $h = 4, d = 6$, so dass nur diese Anzahlen für die Lösung in Frage kommen.

Dass mit diesen Anzahlen tatsächlich eine (und bis auf die willkürliche Nummerierung de Teilnehmer auch genau eine) Lösung existiert, die allen drei gestellten Bedingungen genügt, zeigt nachfolgende Aufstellung der 12 Tanzpaare, in welcher die Herren von 1 bis 4, die Damen von 1' bis 6' nummeriert sind:

$$11', 22', 33', 14', 25', 36', 21', 32', 13', 44', 45', 46'$$

Hierin treten wie gefordert 1, 2, 3 und 4 je genau dreimal und 1', 2', ..., 6' je genau zweimal auf.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 091212:

Es wird sogleich der allgemeine Fall b) gelöst:

b) Setzt man $z = x + \frac{3}{2}$, dann ist x eine Lösung der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a \tag{1}$$

genau dann, wenn z eine Lösung der Gleichung

$$\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right) = a \qquad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$\left(z^2-\frac{9}{4}\right)\left(z^2-\frac{1}{4}\right) = a$$

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} - a = 0 \tag{3}$$

ist. Nun ist die Gleichung (3) erfüllt genau dann, wenn

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16} + a} = \frac{5}{4} + \sqrt{1+a} \qquad \text{oder} \tag{4}$$

$$z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1+a} \tag{5}$$

gilt. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

1. *Fall* : (zugleich Antwort zu Aufgabe a):

Für $a = \frac{9}{16}$ folgt aus (4) und (5)

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{10}{4} \qquad ; \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = 0$$

Daher hat die Gleichung (3) in diesem Fall genau drei Lösungen, nämlich

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}; \qquad z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Die Gleichung (1) hat daher in diesem Fall ebenfalls genau drei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{3}{2}; \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}; \qquad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

2. *Fall* : Für $a < -1$ hat die Gleichung (3) und damit auch Gleichung (1) keine Lösung, weil $1 + a < 0$ ist.

3. *Fall* : Für $a = -1$ hat die Gleichung (3) genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

4. *Fall* : Für $a > -1$ und $\sqrt{1+a} < \frac{5}{4}$, d.h. $1 + a < \frac{25}{16}$, also $a < \frac{9}{16}$, d.h. für $-1 < a < \frac{9}{16}$ hat die Gleichung (4) genau vier Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_3 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}; \qquad z_1 = -\sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}$$

5. *Fall* : Für $a > \frac{9}{16}$ wird $\frac{5}{4} - \sqrt{1+a} < \frac{5}{4} - \frac{5}{4}$; die Gleichung hat also genau zwei Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}$$

Zusammenfassung:

Daher hat die Gleichung (1), wenn man nur reelle Lösungen zulässt, keine Lösung, falls $a < -1$, genau eine Lösung in keinem Falle, genau zwei Lösungen falls $a = -1$, oder $a > \frac{9}{16}$, genau drei Lösungen, falls $a = \frac{9}{16}$, genau vier Lösungen, falls $-1 < a < \frac{9}{16}$, mehr als vier Lösungen in keinem Falle.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 091213:

Da für alle positiven ganzen Zahlen

$$(a^a)^a = a^{a \cdot a} = a^{(a^2)}$$

gilt, kann die gegebene Gleichung auch in der Form $a^{a^a} = a^{(a^2)}$ geschrieben werden.

(1) Für $a \neq 1$ folgt hieraus die Bedingung, dass die Exponenten übereinstimmen müssen, so dass $a^a = a^2$ gefolgert werden kann. Wegen $a \neq 1$ folgt daraus weiter die Bedingung $a = 2$. Also kann für $a \neq 1$ nur die natürliche Zahl 2 Lösung sein.

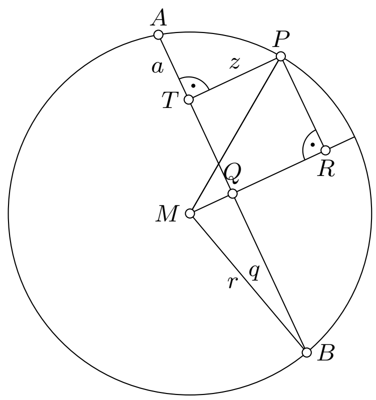
Tatsächlich gilt $2^{2^2} = 2^4 = 16$ und $(2^2)^2 = 4^2 = 16$.

(2) Prüft man den bisher ausgeschlossenen Fall $a = 1$ unmittelbar durch Einsetzen in die gegebene Gleichung, so zeigt sich, dass auch die natürliche Zahl 1 die gegebene Gleichung löst; denn es gilt $1^{1^1} = 1 = (1^1)^1$.

Weitere Lösungswerte gibt es nicht.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 091214:



Es sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, Q der Mittelpunkt der Sehne AB, PR das Lot von P auf die Gerade durch M und Q. Dann kann o.B.d.A. $0 < a \leq b$ vorausgesetzt werden, da dies gegebenenfalls durch entsprechende Wahl der Bezeichnungen stets erreicht werden kann.

Dabei gilt $PR = \frac{1}{2}(b - a)$ und $BQ = \frac{1}{2}(b + a)$. Setzt man nun $PR = p$, $BQ = q$, so erhält man

$$z = \sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2} \qquad \text{und} \qquad z' = \frac{(q-p)(q+p)}{2r} \qquad \text{also}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{q^2 - p^2}{2r(\sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2})} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - q^2}}{2r}$$

Aus $0 < a \leq b$ und $a + b \leq \frac{1}{5}r$ folgt $0 \leq p < q \leq \frac{1}{10}r$, also

$$r\sqrt{0,99} \leq \sqrt{r^2 - q^2} < \sqrt{r^2 - p^2} \leq r$$

und hieraus $\sqrt{0,99} < \frac{z'}{z} < 1$, also $\delta = \left|1 - \frac{z'}{z}\right| = 1 - \frac{z'}{z} < 1 - \sqrt{0,99}$.

Nun ist $(1 - 0,0051)^2 = 1 - 0,0102 + 0,00002601 < 0,99$, also $1 - 0,0051 < \sqrt{0,99}$.

Daher gilt: $\delta < 1 - \sqrt{0,99} < 0,0051$. Der relative Fehler ist kleiner als 0,0051, d.s. 0,51 %.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission