9. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1969/1970

Aufgaben und Lösungen

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 091231:

a) Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$z = \frac{65\,533^3 + 65\,534^3 + 65\,535^3 + 65\,536^3 + 65\,537^3 + 65\,538^3 + 65\,539^3}{32\,765 \cdot 32\,766 + 32\,767 \cdot 32\,768 + 32\,768 \cdot 32\,769 + 32\,770 \cdot 32\,771}$$

ganzrational ist!

b) Die Zahl z ist zu berechnen!

Aufgabe 091232:

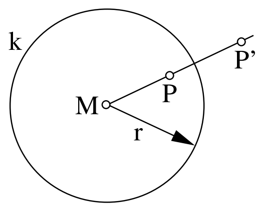
Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, daß jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, daß Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so daß diese Wünsche erfüllt sind!

Aufgabe 091233:

Gegeben sei in einer Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $\overline{MP} \cdot \overline{MP_1} = r^2$ ist.



Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε, der k orthogonal schneidet, d.h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.

Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Aufgabe 091234:

Beweisen Sie, daß das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{2\,499}{2\,500} \quad (n \text{ natürliche Zahl})$$

kleiner als 0,02 ist!

Aufgabe 091235:

Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks ΔABC wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, daß die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.

Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

Aufgabe 091236:

a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d.h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!

b) Zeigen Sie, daß es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt!

Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 091231:

Mit $n := 2^{15} = 32768$ ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2n-3)^3+(2n-2)^3+(2n-1)^3+(2n)^3+(2n+1)^3+(2n+2)^3+(2n+3)^3}{(n-3)(n-2)+(n-1)n+n(n+1)+(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{7\cdot(2n)^3+3\cdot(2n)^2\cdot(-3-2-1+1+2+3)}{4n^2+n\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6}+ \\ &\quad+\frac{3\cdot(2n)\cdot((-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2)-3^3-2^3-1^3+1^3+2^3+3^3)}{4n^2+n\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6} \\ &= \frac{56n^3+168n}{4n^2+12} = \frac{4\cdot 14\cdot n\cdot(n^2+3)}{4\cdot(n^2+3)} = 4n = 2^{17} = 131\,072 \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091232:

Wir führen eine Fallunterscheidung danach durch, welche der Fahrten von Dieter übernommen wird:

Fall 1**:** Dieter fährt als Erster. Dann fährt Christian nach 1. als Dritter und nach 3. Bodo nicht als Zweiter, also Vierter, sodass für Axel nur der zweite Platz verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Dieter, Axel, Christian, Bodo, welche der Bedingung 2 widerspricht. In diesem Fall gibt es also keine gültige Lösung.

Fall 2**:** Dieter fährt als Zweiter. Dann fährt nach 2. Christian als Erster und nach 3. Axel nicht als Dritter, also als Vierter, womit für Bodo nur die dritte Position verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Dieter, Bodo, Axel. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 3**:** Dieter fährt als Dritter. Dann fährt nach 4. Axel als Zweiter. Nach 2. fährt Christian als Erster und schließlich Bodo als Vierter. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Axel, Dieter, Bodo. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 4**:** Dieter fährt als Vierter. Dann fährt nach 5. Christian als Dritter, Axel als Erster und Bodo schließlich als Zweiter. Es ergibt sich die Reihenfolge Axel, Bodo, Christian, Dieter, die aber 2. widerspricht, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Es gibt also genau zwei zulässige Reihenfolgen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091233:

Es wird k_1 auf sich selbst abgebildet.

Beweis:

Seien S und T die beiden Schnittpunkte von k und k_1. Dann gilt offensichtlich $|MS| \cdot |MS| = r^2 = |MT| \cdot |MT|$, sodass die Punkte S und T ihre eigenen Spiegelpunkte bezüglich k sind.

Sei nun P ein Punkt auf k_1, der verschieden von diesen beiden Schnittpunkten ist. Dann schneidet der von M ausgehende Strahl durch P den Kreis k_1 in einem zweiten Punkt, da es sich nicht um eine Tangente handeln kann, da die beiden von M ausgehenden Tangenten an k_1 durch S und T verlaufen. Nennen wir diesen zweiten Schnittpunkt P_1.

Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz (bezogen auf k_1, die Sehne PP_1 und die Tangente MS) die Beziehung $|MP| \cdot |MP_1| = |MS|^2 = r^2$, sodass jeder Punkt auf k_1 wieder auf einen Punkt auf k_1 abgebildet wird.

Offensichtlich ist diese Spiegelungsoperation aber auch umkehrbar:

Wird sie zwei mal angewendet, erhält man wieder den Ausgangspunkt. Demzufolge muss auch jeder Punkt auf k_1 der Spiegelungspunkt eines anderen (oder sich selbst) auf k_1 sein, sodass der geometrische Ort aller Spiegelungspunkte bezüglich k von Punkten auf k_1 wieder genau k_1 selbst ist $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091234:

Nach der dritten binomischen Formel gilt $(2n+1)(2n-1) = (2n)^2 - 1^2 < (2n)^2$. Setzen wir ein paar Werte für n ein:

$$n = 1: \quad 3 \cdot 1 < 2^2 \qquad n = 2: \quad 5 \cdot 3 < 4^2$$

$$n = 3: \quad 7 \cdot 5 < 6^2 \qquad ... \qquad n = 1250: \quad 2501 \cdot 2499 < 2500^2$$

Multiplizieren wir die Ungleichungen:

$$1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2 \cdot 2501 < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2$$

$$\frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2} < \frac{1}{2501}$$

Ziehen wir noch die Wurzel:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2499}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2500} < \frac{1}{\sqrt{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösungsweg:

Es ist wegen $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$:

$$2501 \cdot p^2 = 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2497 \cdot 2499}{2498^2} \cdot \frac{2499 \cdot 2501}{2500^2} < 1 \quad \text{also}$$

$$p < \sqrt{\frac{1}{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 091235:

Seien M_A, M_B, M_C und r_A, r_B, r_C die Mittelpunkte bzw. die Radien der Kugeln.

Das Viereck ABM_BM_A hat in A und B zwei rechte Winkel und die Seiten AM_A und BM_B sind parallel.

Da die Kugeln sich berühren, hat M_AM_B die Länge $r_A + r_B$.

Der Satz des Pythagoras ergibt die Gleichung $|AB|^2 + (|AM_A| - |BM_B|)^2 = |M_A M_B|^2$.

Einsetzen und Kürzen liefert die Gleichung $c^2 = 4r_A r_B$. Zusammen mit den Gleichungen zu den beiden anderen Seiten erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c^2 &= 4r_A r_B \\ b^2 &= 4r_A r_C \\ a^2 &= 4r_B r_C. \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösung $r_A = \frac{bc}{2a}, \quad r_B = \frac{ac}{2b}, \quad r_C = \frac{ab}{2c}$

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 091236:

a) Mit $\sin x$ und $\cos x$ ist auch die Funktion $y = \sin x + \cos x$ 2π-periodisch stetig und differenzierbar. Also nimmt sie ihre globalen Extremwerte an Stellen an, für die die Ableitungsfunktion $y' = \cos x - \sin x$ verschwindet, für die also $\cos x = \sin x$ gilt.

Dies ist im Intervall $[0; 360°)$ genau für $x = 45°$ und $x = 225°$ der Fall. Dann nimmt y die Werte $y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ bzw. $y = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ an, welche dann Maximum und Minimum der Funktion sind. Aufgrund der Stetigkeit werden auch alle Werte dazwischen angenommen (Zwischenwertsatz), sodass sich $W = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ergibt.

b) Wir zeigen allgemeiner, dass für jedes nicht-negative ganze n ein Polynom $g_n(y)$ mit $\sin^n x + \cos^n x = g_n(y) = g_n(\sin x + \cos x)$ existiert:

Für $n = 0$ wähle man $g_0(y) := 2$, da $\sin^0 x + \cos^0 x = 1 + 1 = 2$ gilt.

Für $n = 1$ wähle man $g_1(y) := y$, da $\sin^1 x + \cos^1 x = \sin x + \cos x = y$ gilt.

Für $n = 2$ wähle man $g_1(y) := 1$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt. Insbesondere ist auch

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot ((\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)) = \frac{1}{2} \cdot (y^2 - 1) =: h(y)$$

ein Polynom in y.

Sei ab nun die Aussage schon für alle Werte $k \leq n$ bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} y^{n+1} = (\sin x + \cos x)^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x \\ &= \sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i} \end{aligned}$$

also

$$\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x = y^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

Wegen $\binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{n+1-i}$ können wir nun je zwei solche Summanden zusammenfassen und erhalten für ein solches Paar mit $i < \frac{n+1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\binom{n+1}{i} \cdot (\sin^i x \cos^{n+1-i} x + \sin^{n+1-i} x \cos^i x) \\ &= \binom{n+1}{i} \cdot \sin^i x \cos^i x \cdot (\cos^{n+1-2i} x + \sin^{n+1-2i} x) \\ &= \binom{n+1}{i} \cdot h(y)^i \cdot g_{n+1-2i}(y) \end{aligned}$$

Existiert ein "mittlerer Summand", also eine ganze Zahl i mit $i = \frac{n+1}{2}$, so lässt sich der zugehörige Summand $\binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x$ mit keinem anderen zusammenfassen. Er ist aber wegen $i = n+1-i$ gleich dem Wert $\binom{n+1}{i} h(y)^i$.

Damit ist auch $\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x$ darstellbar als Differenz eines Polynoms mit einer Summe von Produkten von Polynomen, also insgesamt einem Polynom, in der Variablen $y = \sin x + \cos x$, $\Box$.

Einsetzen von $n = 7$ liefert dann die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix