10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1970/1971

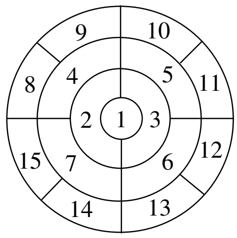
Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100831:

Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend numeriert wurden.



Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Aufgabe 100832:

Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, daß beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Aufgabe 100833:

Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, daß der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

Aufgabe 100834:

Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so daß folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Aufgabe 100835:

Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:

(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.

(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.

(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.

(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.

(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.

(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.

Brigitte entgegnet darauf: "Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein."

Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Aufgabe 100836:
Beweise den folgenden Satz:

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks ΔABC, dann halbieren die Höhen des Dreiecks ΔABC die Innenwinkel des Dreiecks $\sphericalangle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\sphericalangle EFD$ zu führen.)

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100831:

Die Radien der vier Kreise seien von innen nach außen mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet. Die Kreise enthalten der Reihe nach 1, 3, 7 und 15 der genannten jeweils einander inhaltsgleichen Flächenstücke.

Da die Flächeninhalte der Kreise πr_i^2 $(i = 1, 2, 3, 4)$ betragen, erhält man aus der Aufgabenstellung die Proportion

$$\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1 : 3 : 7 : 15$$

und daraus wegen $r_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ schließlich, dass

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$$

gelten muss, wenn alle 15 Flächenstücke einander inhaltsgleich sein sollen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100832:

Da P_1 das gesamte Becken in genau 4 h 30 min füllt, wurde durch diese Pumpe in 30 min genau $\frac{1}{9}$ des Beckens gefüllt. In jeder Minute füllte P_1 mithin genau $\frac{1}{270}$ des Beckens.

Da P_2 das gesamte Becken in genau 6 h 45 min, also in 405 min füllt, füllte diese Pumpe in jeder Minute $\frac{1}{405}$ des Beckens.

In der Zeit, in der beide Pumpen zusammen arbeiteten, füllten sie mithin in jeder Minute wegen

$$\frac{1}{270} + \frac{1}{405} = \frac{15}{2430} = \frac{1}{162}$$

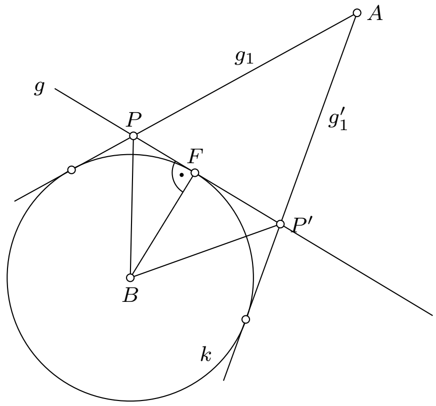
genau $\frac{1}{162}$ des Beckens. Insgesamt wurden von beiden Pumpen gemeinsam $\frac{8}{9}$ des Beckens gefüllt.

Wegen $\frac{8}{9} = \frac{144}{162}$ geschah das in genau 144 min. Infolgedessen wurde das Becken in der in der Aufgabe angegebenen Weise in genau 174 min, das sind 2 h 54 min, gefüllt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100833:

(I) Angenommen, P sei ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann hat B als Punkt der Winkelhalbierenden gleiche Abstände zu g und der Geraden g_1 durch A und P, also wird derjenige Kreis um B, der g berührt, auch g_1 berühren.



(II) Daher entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man fällt das Lot BF von B auf g. Dann schlägt man den Kreis k um B durch F und konstruiert die Tangenten von A an k.

Ist g_1 eine dieser Tangenten und schneidet sie g, so sei P ihr Schnittpunkt mit g.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Die Geraden g und g_1 werden nach Konstruktion beide von k berührt, sie haben also gleiche Abstände von B. Daher liegt B auf einer Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden.

(IV) Die Konstruktion von F ist stets eindeutig durchführbar und ergibt $F \neq B$ und $F \neq A$, da A und B nicht auf g liegen. Ferner liegt k mit Ausnahme des Punktes F ganz auf der anderen Seite von g wie A. Also liegt A außerhalb von k.

Somit gibt es genau zwei verschiedene Tangenten g_1 und g_1' von A an k.

Da jede von ihnen A und einen Punkt von k, also einen Punkt auf der anderen Seite von g wie A, enthält, schneidet jede von ihnen g, und diese beiden Schnittpunkte P, P' sind auch voneinander verschieden, da sie andernfalls sowohl auf g_1, als auch auf g_1' lägen, also mit dem Schnittpunkt A von g_1 und g_1' zusammenfielen.

Somit hat die Aufgabe genau diese zwei Lösungen P, P'.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100834:

Wegen $a > b$ gilt $a^2 - b^2 > 0$.

Wegen $(a-b) \geq (a+b)$ ist $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ genau dann Primzahl, wenn $a - b = 1$ und $a + b$ Primzahl ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100835:

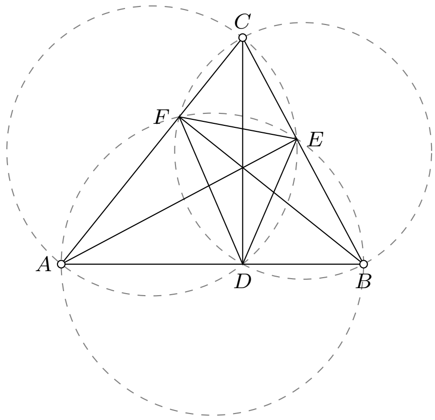
Angenommen, die Aussagen (1), (2), (3), (4), (5), (6) wären sämtlich wahr. Dann hätte wegen (3) und (4) jedes Ehepaar wenigstens 1 Mädchen.

Wegen (1), (4), (5) und (6) müsste folglich die Anzahl der Jungen kleiner sein als die Anzahl der Ehepaare und damit erst recht kleiner als die Anzahl der Mädchen, im Widerspruch zu (2).

Brigitte hat also mit ihrem Einwand recht.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 100836:



Die Fußpunkte der die Punkte A, B bzw. C enthaltenden Höhen des spitzwinkligen Dreiecks ABC seien mit E, F bzw. D in dieser Reihenfolge bezeichnet.

Jeder der Punkte E, F, D liegt nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf zwei der drei Kreise, die je eine der Dreiecksseiten als Durchmesser haben. Sie sind innere Punkte der Strecken BC, AC bzw. AB, da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist. Der Strahl FB verläuft folglich im Innern des Winkels $\sphericalangle EFD$.

Nun gilt $\sphericalangle AEB \cong \sphericalangle BDC$ (rechte Winkel), $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle DBC$ und mithin wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck $\sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BCD$.

Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:

$\sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BFE$ (Bogen BE) sowie $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BFC$ (Bogen BD).

Hieraus sowie aus (1) folgt $\sphericalangle BFE \cong \sphericalangle BFD$, d.h. BF halbiert $\sphericalangle EFD$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission