10. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101011:

Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel.

Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann.

Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

Aufgabe 101012:

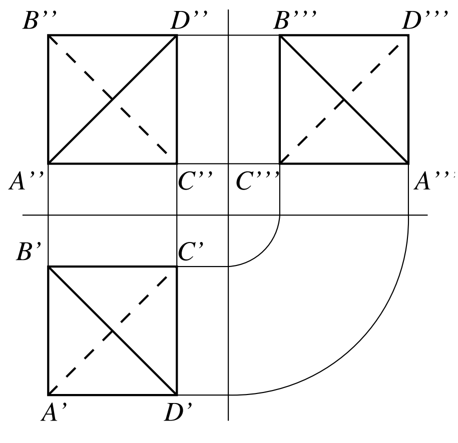
Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichnet s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2\,415$?

b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?

Aufgabe 101013:

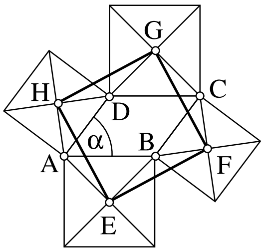
Die Abbildung zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriß. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.



a) Zeichnen Sie einen Schrägriß eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$).

b) Berechnen Sie sein Volumen!

Aufgabe 101014:



Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$.

Man beweise, daß $EFGH$ ein Quadrat ist.

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101011:

Der Spieler A kann den Sieg stets erzwingen.

Der erste Spieler A nimmt 7 Streichhölzer. Dann bleiben 143 liegen. Anschließend nimmt er immer so viele Streichhölzer weg, dass nach seinen Zug deren Anzahl durch 11 teilbar ist. Am Ende nimmt er das letzte Streichholz und gewinnt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101012:

a) Es gilt $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl, für die $\frac{n(n+1)}{2} = 2415$ gilt. Dann folgt

$$n^2 + n - 4830 = 0$$

und hieraus entweder $n = 69$ oder $n = -70$. Da aber $-70 < 0$ ist, kann nur $n = 69$ die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 69:

$$s_{69} = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415.$$

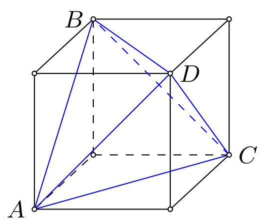
b) Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl m, für die $\frac{m(m+1)}{2} = 69m$ gilt. Wegen $m \neq 0$ folgt daraus $\frac{m+1}{2} = 69$, also $m = 137$. Daher kann nur diese Zahl die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 137

$$s_{137} = \frac{137 \cdot 138}{2} = 137 \cdot 69$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101013:

a)



b) Der dargestellte Körper kann aus einem Würfelkörper mit der Kantenlänge a hervorgehen, indem man von diesem mit ebenen Schnitten durch die Punkte A, B, C; A, B, D; A, C, D und B, C, D vier kongruente Pyramiden abtrennt.

Das Volumen V des dargestellten Körpers ist also gleich der Differenz aus dem Volumen des Würfelkörpers mit der Kantenlänge a und der Summe der Volumina der vier abgetrennten Pyramidenkörper. Da jede von diesen das Volumen $V_P = \frac{1}{6}a^3$ hat, erhält man

$$V = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{3}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101014:

Es sei $|\sphericalangle DAB| = \alpha$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $0° < \alpha \leq 90°$ gilt Dann ist

$$\begin{aligned} &|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle GCF| = \alpha + 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{und} \\ &|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle GDH| = 360° - (180° - \alpha) - 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{also} \\ &|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle GCF| = |\sphericalangle GDH| \qquad (1) \end{aligned}$$

Ferner ist (als halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten)

$$|AE| = |DG| = |BE| = |CG| \qquad (2)$$

$$|AH| = |BF| = |CF| = |DH| \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle AEH \cong \triangle BEF \cong \triangle CGF \cong \triangle DGH$, also

$$|EH| = |EF| = |GF| = |GH| \qquad (4)$$

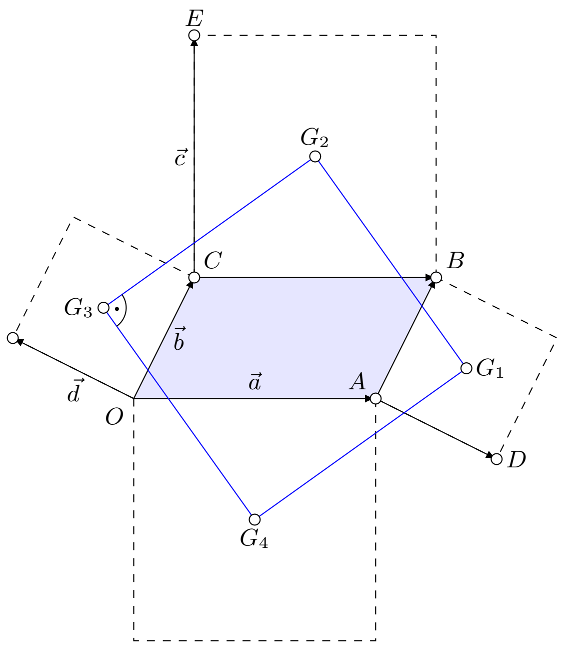
und $|\sphericalangle AEH| = |\sphericalangle BEF|$, also $|\sphericalangle HEF| = |\sphericalangle WEB$, d.h.

$$|\sphericalangle HEF| = 90° \qquad (5)$$

Wegen (4), (5) ist $EFGH$ ein Quadrat.

Bemerkung: Im Fall $\alpha = 90°$ entarten die Dreiecke $\triangle AEH$ usw., (4) und (5) bleiben aber trotzdem richtig.

2. Lösungsweg:



Beweis: Das Parallelogramm sei $OABC$; wir bezeichnen die Vektoren, die das Parallelogramm aufspanne mit $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ und $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$, die dazu senkrechten Vektoren mit $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$.

Für die Mittelpunkte der Aufsatzquadrate, die gleichzeitig deren Schwerpunkte sind, können wir aus dem Bild die Gleichungen

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) \quad ; \quad \overrightarrow{OG_2} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{d}) \quad ; \quad \overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c})$$

ablesen. Daraus folgt durch Differenzbildung

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{f}) = \overrightarrow{G_4G_3} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}) = \overrightarrow{G_2G_3}$$

Damit ist schon nachgewiesen, dass $G_1G_2G_3G_4$ ein Parallelogramm ist. Um zu zeigen, dass es sogar ein Quadrat ist, genügt es, $\overrightarrow{G_1G_2} \bullet \overrightarrow{G_1G_4} = 0$ (rechter Winkel) und $|\overrightarrow{G_1G_2}| = |\overrightarrow{G_1G_4}|$ (gleiche Länge) zu überprüfen. Für das Skalarprodukt erhalten wir:

$$\overrightarrow{G_1G_2} \bullet \overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{a} - \mathbf{d}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\right] \cdot \left[(\mathbf{a} - \mathbf{d}) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})\right] = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 - (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2}{4}$$

Nun gilt offenbar $\triangle OAD \cong \triangle OCE$ nach Kongruenzsatz SWS wegen $|a| = |c|$, $|b| = |d|$ und $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OCE$; also $OD = |\mathbf{a} - \mathbf{d}| = OE = |\mathbf{b} + \mathbf{c}|$ und daher $\overrightarrow{G_1G_2} \bullet \overrightarrow{G_1G_4} = 0$. Schließlich ist

$$|\overrightarrow{G_1G_2}|^2 = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{a} - \mathbf{d}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\right] = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + 2(\mathbf{a} - \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c})\right]$$

$$|\overrightarrow{G_1G_4}|^2 = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{a} - \mathbf{d}) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})\right] = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 - 2(\mathbf{a} - \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c})\right]$$

Beide Ausdrücke sind gleich, wenn

$$(\mathbf{a} - \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} - \mathbf{d})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$$

welches tatsächlich wegen $\mathbf{ac} = 0$ und $\mathbf{bd} = 0$ (da $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}, \mathbf{b} \perp \mathbf{d}$) sowie $\mathbf{ab} = \mathbf{cd}$ (da $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|, |\mathbf{b} = \mathbf{d}|$ und $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{d})$) der Fall ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission