10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101031:

a) Beweisen Sie folgenden Satz!

   Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.

b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, daß man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder daß man x mit y vertauscht oder daß man beides durchführt.

Aufgabe 101032:

Es sei ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 101033:

Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, daß für jedes reelle x $\quad f(x) = f(x+1) - a \quad$ gilt!

Aufgabe 101034:

Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \cdots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x} \text{ gilt!}$$

Aufgabe 101035:

Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte.

Nach Abschluß des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt. Der zweitbeste

Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.

Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt: A, der sich besser als D placierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.

Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

Aufgabe 101036:

Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet.

Es ist zu beweisen, daß es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so daß der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101031:

a) Sei k eine ganze Zahl. Dann ist

$$k+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2=\frac{4k+(k-1)^2}{4}=\frac{k^2-2k+1+4k}{2^2}=\frac{k^2+2k+1}{2^2}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

b) Ist $k=n^2$ eine Quadratzahl, so erhalten wir

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

bzw. nach Multiplikation mit 4 die Gleichung

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$$

sodass man mit $(x,y,z)=(2n,n^2-1,n^2+1)$ ein pythagoräisches Zahlentripel erhält.

Setzt man hierin für n die Zahlen 3; 4; 5 und 6 ein, erhält man die paarweise voneinander verschiedenen pythagoräischen Tripel $(6;8;10)$, $(8;15;17)$, $(10;24;26)$ und $(12;35;37)$.

Bemerkung: Die Definition der Verschiedenheit ist mit seiner Einschränkung auf natürliche "Streckungsfaktoren" ungünstig, da dann z.B. auch die Tripel $(6;8;10)$ und $(9;12;15)$ nach dieser Definition voneinander verschieden wären, obwohl beide nicht vom Tripel $(3;4;5)$ verschieden sind.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101032:

1) Die Kreise um A durch C sowie C durch A schneiden sich in zwei Punkten. Sie seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.

2) Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade AC im Punkt M.

3) Der Kreis um M durch C schneidet die Gerade P_1P_2 in zwei Punkten. Einer davon werde mit P bezeichnet.

4) Der Kreis um C durch P schneide die Gerade AC im Punkt S.

5) Die Parallele zu AB durch S ist die gesuchte Gerade.

Begründung:

Der mit den Schritten 1) und 2) konstruierte Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AC und die Gerade P_1P_2 ist ihre Mittelsenkrechte. Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit Durchmesser AC, sodass das Dreieck $\triangle ACP$ nach dem Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P ist.

Weiterhin liegt P auf der Mittelsenkrechten von AC, sodass $|AP| = |CP|$, also auch $\sphericalangle PAC = \sphericalangle ACP = 45°$ gilt (letzteres aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle APC$). Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \sin \sphericalangle PAC = \frac{|CP|}{|AC|} \qquad \text{also} \qquad |CS| = |CP| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |AC|$$

Sei T der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch S mit BC. Dann geht das Dreieck $\triangle STC$ also aus dem Dreieck ABC durch Streckung um den Faktor $k := \frac{\sqrt{2}}{2}$ mit Zentrum C hervor. Damit ist $F_{\triangle STC} = k^2 \cdot F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} F_{\triangle ABC}$, wie gewünscht.

Bemerkung: Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\triangle ABC$ wurde hier nirgends benutzt und kann demnach auch als Bedingung gestrichen werden.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101033:

Sei $f(x) = mx + n$ mit reellen Zahlen m und n.

Dann geht die Bedingung über in die Aussage $mx+n = m(x+1)+n-a = mx+n+(m-a)$ bzw. $m = a$.

atsächlich erfüllen auch alle linearen Funktionen $f(x) = ax+n$ mit Anstieg a die Bedingung, wie man leicht durch Einsetzen überprüft.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101034:

Es ist bekanntermaßen für alle positiven reellen Zahlen $a \neq 1$ und $b \neq 1$ die Identität $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ erfüllt. Setzen wir dies ein, so wird die linke Seite der zu zeigenden Gleichung zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots \frac{1}{\log_n x} &= \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln 3}{\ln x} + \frac{\ln 4}{\ln x} + \dots \frac{\ln n}{\ln x} \\ &= \frac{\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n}{\ln x} \\ &= \frac{\ln(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)}{\ln x} \\ &= \frac{\ln(n!)}{\ln(x)} \\ &= \frac{1}{\ln_{n!} x} \quad \square \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101035:

Da bei einem Turnier, in dem jeder von n Spielern gegen jeden anderen genau einmal antritt, genau $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Partien ausgetragen werden, und in diesem Turnier genau 15 Partien gespielt wurden, nahmen an diesem also $n = 6$ Spieler teil. Diese seien mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.

Sei darüber hinaus die Punktzahl des Siegers mit x_1, die des Zweitplatzierten mit x_2 usw., die des Letzten mit x_6 bezeichnet. Dann gilt $x_1 > x_2 > \dots > x_6$, also, da nur Vielfache von $\frac{1}{2}$ als Punktzahlen möglich sind, $x_1 \geq x_2 + \frac{1}{2}$, $x_2 \geq x_3 + \frac{1}{2}$, ..., $x_5 \geq x_6 + \frac{1}{2}$ und damit insbesondere auch $x_4 \geq x_6 + 1$, $x_3 \geq x_6 + \frac{3}{2}$

sowie $x_2 \geq x_6 + 2$. Da aber nach Aufgabenstellung $x_2 = x_6 + 2$ gilt, folgt auch Gleichheit in den vorherigen Ungleichungen, d.h. $x_5 = x_6 + \frac{1}{2}$, $x_4 = x_6 + 1$ und $x_3 = x_6 + \frac{3}{2}$.

Da in jeder Partie insgesamt in Summe ein Punkt an beide Spieler vergeben wird, wurden im gesamten Turnier also 15 Punkte vergeben, sodass sich $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 15$ ergibt. Setzt man die zuvor erhaltenen Werte für x_2 bis x_5 in Abhängigkeit von x_6 ein, wird dies zu $x_1 + 5 \cdot x_6 + 5 = 15$. Setzt man nun zusätzlich noch $x_1 \geq x_2 + \frac{1}{2} = x_6 + \frac{5}{2}$ ein, erhält man $6x_6 + \frac{15}{2} \leq 15$ bzw. $x_6 \leq \frac{15}{12} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$. Da auch für x_6 nur Vielfache von halben Punkten zulässig sind, folgt $x_6 \leq 1$.

Umgekehrt erhält man mit $x_1 \leq 5$ (da auch der Sieger nicht mehr als einen Punkt pro Gegner erhalten kann) die Beziehung $5 \geq x_1 = 10 - 5x_6$ bzw. $x_6 \geq 1$, zusammen mit der vorherigen Abschätzung also $x_6 = 1$ und damit auch $x_5 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 3$ und $x_1 = 5$.

Es gibt insgesamt 9 Partien, an denen mindestens einer der beiden Spieler A oder D beteiligt war (je 4 gegen die übrigen Turnierteilnehmer und eine gegeneinander). Unter diesen war kein Remis, sodass die genau 5 Remis des Turniers alle unter den 6 Partien der Spieler B, C, E und F zu finden sind.

Damit gibt es genau zwei dieser vier Spieler, nennen wir sie X und Y, die untereinander kein Remis erzielten. Für die anderen beiden Spieler gilt, dass sie sowohl untereinander als auch gegen X und Y remis spielten. Damit haben diese beiden keine ganzzahlige Punktzahlen und müssen Dritt- und Fünftplatzierter sein.

Demnach hat C als dritter sowohl gegen E, F als auch insbesondere B remisiert.

Bemerkung:

Die Aussage, dass C gegen den Vierten gewonnen hat, wurde in dieser Lösung nicht verwendet.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101036:

Wir zerlegen den Würfel durch parallele Schnitte in 27 mit je $\frac{1}{3}$ als Kantenlänge. Dann müssen in mindestens einem Teilwürfel 2 dieser 28 Punkte liegen. Der maximale Abstand, den zwei Punkte in einem Würfel haben können, entsteht, wenn sie die Endpunkte einer seiner Raumdiagonalen bilden.

Diese hat die $\sqrt{3}$-fache Länge der Kantenlänge des Würfels, woraus sich sofort die Behauptung ergibt, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix