10. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101041:

Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, daß in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

Aufgabe 101042:

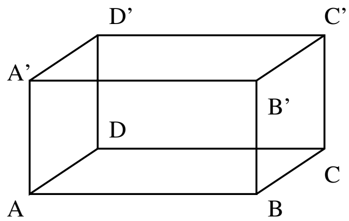
Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und den Kantenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AA'} = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. A', D, C' bzw. B', C, D' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten.

Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.

a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\left(\alpha = 60°, q = \frac{1}{3}\right)$ dar.

   Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm zu zeichnen.

b) Man berechne $V_R : V_Q$.



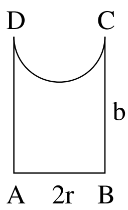
Aufgabe 101043A:

Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die

$$[\log_{12} c] \leqslant [\log_4 c] \text{ gilt.}$$

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Aufgabe 101043B:



Die Abb. zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ entstanden ist.

Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.

Aufgabe 101044:

Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x + 1) = f(-x)$ erfüllen.

Aufgabe 101045:
Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl.

Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung $\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$ erfüllen.

Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r < -6$.

b) Es sei $r = -6$.

c) Es sei $-6 < r < 0$.

d) Es sei $r > 0$.

Aufgabe 101046:
Die Fläche eines Dreiecks ΔABC soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, daß E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks ΔABC, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks ΔEFD sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.

Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

10. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101041:
Sei M eine solche Menge. Wir geben für einige Ziffern alle ein- und zweistelligen Primzahlen an, in denen sie als Ziffer enthalten sind:

2: 2, 23, 29
4: 41, 43, 47
5: 5, 53, 59
6: 61, 67
8: 83, 89

Da die fünf Primzahlen insgesamt 9 Ziffern besitzen sollen, ist unter ihnen genau eine einstellige und sind die übrigen vier zweistellig.

Fall 1: Es ist $2 \in M$. Dann muss die 5 in einer zweistelligen Primzahl vorkommen.
Fall 1.1: $53 \in M$. Dann muss auch $89 \in M$ sein, da sonst die Ziffer 8 nicht mehr vorkommen kann.
Fall 1.1.1: $61 \in M$. Dann muss auch, um die Ziffer 4 abzudecken, $47 \in M$ sein. Wir erhalten $M_1 = \{2, 53, 89, 61, 47\}$.
Fall 1.1.2: $67 \in M$. Dann muss zur Abdeckung der Ziffer 4 auch $41 \in M$ sein, sodass wir $M_2 = \{2, 53, 89, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 1.2: $59 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der 8, dass $83 \in M$.
Fall 1.2.1: $61 \in M$. Zur Abdeckung der 4 muss dann auch $47 \in M$ gelten.
Wir erhalten $M_3 = \{2, 59, 83, 61, 47\}$.
Fall 1.2.2.: $67 \in M$. Für die Ziffer 4 muss dann auch $41 \in M$ sein, sodass $M_4 = \{2, 59, 83, 67, 41\}$ folgt.

Fall 2: Es ist $23 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der Ziffer 8 auch $89 \in M$. Es folgt, dass die 5 nur allein stehen kann, also $5 \in M$. Zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6 gibt es nun wieder zwei Möglichkeiten, sodass wir die beiden Mengen $M_5 = \{23, 89, 5, 61, 47\}$ und $M_6 = \{23, 89, 5, 67, 41\}$ erhalten.

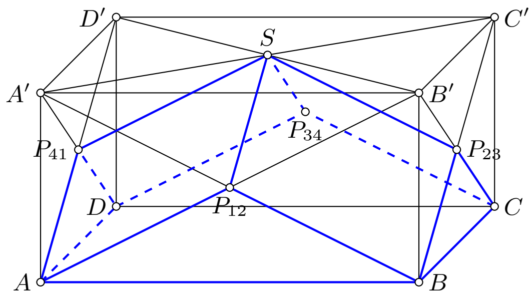
Fall 3: Es ist $29 \in M$. Dann folgt analog dem zweiten Fall, dass $83 \in M$ und $5 \in M$. Wieder ergeben sich die gleichen zwei Möglichkeiten zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6, sodass wir abschließend die beiden Mengen $M_7 = \{29, 83, 5, 61, 47\}$ und $M_8 = \{29, 83, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass es genau diese acht Mengen gibt, die der Aufgabenstellung genügen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101042:
Man bezeichne die vier schneidenden Ebenen mit E_1, E_2, E_3, E_4 entsprechend der in der Aufgabenstellung festgelegten Reihenfolge.

E_1 und E_2 schneiden die Deckfläche des Quaderkörpers nach den Diagonalen $B'D'$ bzw $A'C'$. Der Schnittpunkt S dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam.



E_1 und E_2 schneiden die Seitenfläche $ABB'A'$ des Quaderkörpers nach den Diagonalen AB' bzw. $A'B$. Der Schnittpunkte P_{12} dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. Folglich ist die Verbindungsgerade SP_{12} die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

Wegen der Konvexität der Quaders hat die Schnittgerade mit dem Quaderkörper genau die Strecke SP_{12} gemeinsam. Aus den gleichen Überlegungen ist die Verbindungsgerade AP_{12} Schnittgerade von E_1 mit der von den Punkten $ABB'A'$ aufgespannten Ebene. Entsprechend liegt BP_{12} in der Schnittgeraden von E_2 und $ABB'A'$.

Die Punkte A, B und P_{12} liegen gemeinsam mit dem Restkörper unterhalb der Ebenen E_3 und E_4. Daraus folgt, dass die Strecken AP_{12}, BP_{12}, SP_{12} Kanten des Restkörpers darstellen. Die Kante AB bleibt bei diesen vier Schnitten ungeändert bestehen.

Durch zyklische Fortsetzung dieser Überlegungen findet man, dass die Punkte A, B, C, D als Eckpunkte des Restkörpers erhalten bleiben, während die Ecken A', B', C', D' entfallen. Genau die Mittelpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} und S der Seitenflächen bzw. Deckfläche treten als neue Eckpunkte hinzu.

Es verbleibt ein konvexer Restkörper mit 9 Ecken, 16 Kanten und 9 Flächen. Die Probe mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes $f + f - k = 2$ ist erfüllt.

Das Volumen V_R des Restkörpers kann in folgender Weise zu dem Volumen V_Q der Quaders in Beziehung gesetzt werden:

Man lege durch den Punkt S zwei seitenparallele ebene Schnitte, die den Quaderkörper in vier kongruente Quaderkörper zerlegen. Durch Anbringen der vier ebenen Schnitte wird z.B. der Teilquader mit der Kante AA' von der Ebene E_1 in zwei volumengleiche Teilkörper zerlegt, wobei genau der untere Teil dem Restkörper zufällt.

Wendet man diese Überlegung auf alle vier Teilquader an, ergibt sich die Aussage $V_R : V_Q = 1 : 2$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101043A:

Es ist $\ln 12 > \ln 4$, also $\frac{1}{\ln 12} < \frac{1}{\ln 4}$. Für $c \geq 1$ ist auch $\ln c \geq 0$ und damit $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} \leq \frac{\ln c}{\ln 4}$, woraus sofort die behauptete Ungleichung folgt. Diese ist also zumindest für alle $c \geq 1$ erfüllt.

Andernfalls ist $0 < c < 1$ und $\ln c < 0$. Dann folgt $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} > \frac{\ln c}{\ln 4}$.

Damit dennoch $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gelten kann, müssen beide Logarithmen auf die gleiche ganze Zahl n abgerundet werden, d.h., es muss eine negative ganze Zahl n geben mit $n \leq \log_4 c < \log_{12} c < n + 1$. Demnach muss $4^n \leq c < 12^{n+1}$.

Für $n = -1$ liefert dies $c \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$ und für $n = -2$ die Aussage $c \in \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{12}\right)$.

Für $n \leq -3$ ist $3^n \leq \frac{1}{27} < \frac{1}{12}$, also $12^{n+1} = 12 \cdot 12^n = 12 \cdot 3^n \cdot 4^n < 4^n$, sodass die obere Intervallgrenze kleiner würde als die untere und damit keine weiteren Lösungen entstehen.

Die Gleichung ist also genau für alle c mit $\frac{1}{16} \leq c < \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4} \leq c$ erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101043B:

Der Umfang u des Flächenstücks ermittelt sich zu $u = 2b + 2r + \pi r = 2b + (2+\pi)r$ und sein Flächeninhalt zu $F = b \cdot 2r - \frac{1}{2}\pi r^2$. Damit ist $2b = \frac{F}{r} + \frac{\pi}{2} r$. Einsetzen liefert $u = \frac{F}{r} + \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r$.

Fasst man u als Funktion von r auf, ergibt sich $u'(r) = -\frac{F}{r^2} + \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right)$. Diese Funktion besitzt die einzige Nullstelle $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$. Es ist wegen $F > 0$ die Funktion u' streng monoton wachsend für $r > 0$.

Insbesondere ist also $u'(r)$ negativ und $u(r)$ streng monoton fallend für $0 < r < r_0$ sowie $u'(r)$ positiv und $u(r)$ streng monoton wachsend für $r > r_0$. Damit hat also u nicht nur ein lokales, sondern auch sein globales Minimum an der Stelle r_0.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{F}{2r_0} + \frac{\pi}{4} r_0 \\ &= \frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}}{\sqrt{F}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} \\ &= \frac{\sqrt{F}}{2 \cdot \sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} \cdot (1+\pi) \\ &= r_0 \cdot (1+\pi) \end{aligned}$$

und damit das gesuchte Lösungspaar $(r, b) = (r_0, (1+\pi)r_0)$ mit $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$.

Bemerkung: Der Umfang ergibt sich dann zu

$$u_0 = 2b_0 + (2+\pi)r_0 = (4+3\pi)r_0 = 2 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r_0 = 2\sqrt{F} \cdot \sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi} = 2 \cdot \frac{F}{r_0}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101044:

Sei $f(x)$ die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$mit $a \neq 0$. Dann ist die Bedingung der Aufgabenstellung äquivalent zur Aussage, dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c$$

also

$$ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) = ax^2 + (-b) \cdot x + c$$

bzw. $(2a+2b)x + (a+b) = 0$. Da dies für alle reellen Zahlen x gelten soll, muss $2a + 2b = 0$, also $b = -a$ gelten.

Tatsächlich erfüllen auch alle quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 - ax + c$ mit beliebigen, reellen Zahlen

$a \neq 0$ und c die gewünschte Gleichung, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1)^2 - a(x+1) + c \\ &= a(x+1)(x+1-1) + c \\ &= a(x+1)x + c \\ &= a(x^2+x) + x \\ &= a(-x)^2 - a(-x) + c \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101045:

Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} = \frac{r+6}{2r}$.

a) Ist $r < -6$, dann $r+6 < 0$ und $2r < 0$, also $\frac{r+6}{2r} > 0$. Damit wird die Ungleichung falsch für alle negativen x und nur wahr für alle positiven x, die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$, also $x < \frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es ist also $x \in \left(0; \frac{4r}{r+6}\right)$.

b) Für $r = -6$ ist $\frac{r+6}{2r} = 0$, sodass die Ungleichung genau von allen positiven x erfüllt wird: $x \in (0; \infty)$.

c) Ist $-6 < r < 0$ ist $r+6 > 0$ aber $2r < 0$, sodass $\frac{r+6}{2r}$ negativ ist. Damit ist die Ungleichung auf jeden Fall für alle positiven x wahr und darüberhinaus für alle negativen x, die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$ also $x < \frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es folgt $x \in \left(-\infty; \frac{4r}{r+6}\right) \cup (0; \infty)$.

d) Ist $r > 0$, so auch $\frac{r+6}{2r} > 0$. Damit erfüllen wieder alle negativen x automatisch die Ungleichung nicht, da dann auch $\frac{2}{x} < 0$ ist. Darüber hinaus erfüllen nur diejenigen positiven x die Ungleichung, für die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$ gilt, sodass wir in diesem Fall die Lösungsmenge $x \in \left(\frac{4r}{r+6}; \infty\right)$ erhalten.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101046:

Unter der Annahme, dass in einem Dreieck ABC ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck EFD existiert, kann man folgende Aussagen machen:

(1) Dreieck EFD ist wegen der gefoderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck ABC.

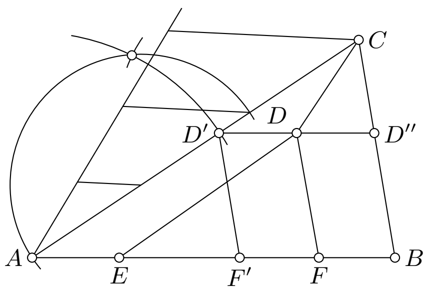
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke AE in Richtung der Strecke BA entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.

(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt

$$AD' : AC = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $F'D'$ und FD folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz $2FB = F'B'$, also $FB = F'F$.



Konstruktion:

Man teilt AC im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3}AC$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3}AC$. Die zweite Kathete sit dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3}AC$.

Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'.

Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist d, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets der Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Überlegungen:

Wegen $AD' = \frac{1}{3}\sqrt{3}AC$ und $F'D'$ parallel BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu.

Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD.

Damit muss auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muss.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission