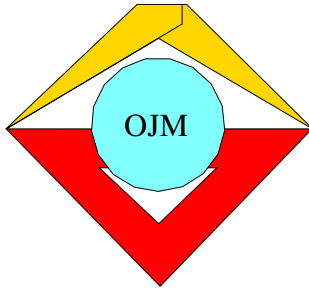




10. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen





10. Mathematik-Olympiade 1. Stufe (Schulolympiade) Klasse 12 Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 101211:

In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil.

Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

Aufgabe 101212:

In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, daß jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a !

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis $3 : 1$, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

Aufgabe 101213:

Beweisen Sie!

Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$ gilt: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Aufgabe 101214:

Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x) = ax^2 + bx + c$ gesetzt.

a) Man beweise, daß folgender Schluß richtig ist:

Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.

Behauptung: Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0)$, $f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, daß ein richtiger Schluß entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.



10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 101211:

Nach 3. folgt, dass 1 oder 2 Einzelväter anwesend waren, also sind 16 oder 17 Väter (von den anwesenden 18) mit der Mutter da (4)

Nach 2. folgt, dass höchstens 7 Mütter alleine da waren, von den insgesamt 24 Müttern sind also mindestens 17 Mütter mit dem Vater da (5)

Nach diesen beiden Aussagen (4) und (5) folgt, dass genau 17 Elternpaare da sind, somit also noch ein Einzelvater und 7 Einzelmütter (6)

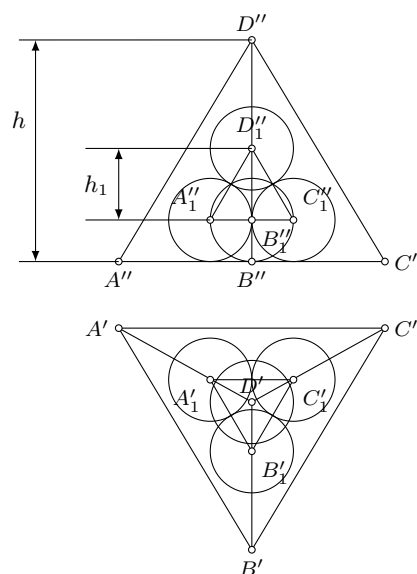
Nach 1. sind von 18 Schülern beide Eltern da, d.h. 17 Elternpaare (6) gehören zu 18 Kindern, also befindet sich darunter ein Geschwisterpaar (7)

Jetzt bleibt noch ein Einzelvater für 2 Kinder nach 3. und (4), also sind die Kinder auch Geschwister.

Also gibt es in der Klasse 2 Geschwisterpaare, also 4 Kinder, die Geschwister in der Klasse haben.

Aufgeschrieben und gelöst von Matthias Lösche

Lösung 101212:





Da laut Aufgabe jede der Kugeln die drei anderen von außen berührt, bilden die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte aller vier Kugeln die Kanten eines regulären Tetraeders T_1 mit der Kantenlänge $2r$.

Zu je drei der Kugeln existiert ferner genau eine Seitenfläche F des gegebenen Tetraeders T , die von diesen drei Kugeln berührt wird. Deren Mittelpunkte haben daher von F den Abstände r . Somit ist diejenige Seitenfläche F_1 des Tetraeders T_1 , auf der die genannten drei Mittelpunkte liegen, parallel zu F im Abstand r .

Dreht man nun die gesamte Figur so um eine Höhe von T , dass eine andere Seitenfläche F' von T in die Lage F kommt, so kommt eine andere Seitenfläche F'_1 von T_1 in die Lage F_1 . Daher liegen entsprechende Höhen der beiden Tetraeder jeweils auf der gleichen Geraden. Infolgedessen fallen die Höhenschnittpunkte beider Tetraeder zusammen.

Bezeichnet man die Länge der Höhe des gegebenen Tetraeders mit h , die des in ihm liegenden Tetraeders mit h_1 , so ist

$$d = \frac{h_1}{4} + r = \frac{h}{4} \tag{1}$$

der Abstand d des gemeinsamen Höhenschnittpunktes zu jeder Fläche des gegebenen Tetraeders. Nun gilt für die Länge h der Höhe eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a die Beziehung $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Analog erhält man

$$h_1 = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{r}{6}\sqrt{6} + r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

also

$$r \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

woraus man

$$r = \frac{a \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{12 \cdot (6 + \sqrt{6})} = \frac{a(\sqrt{6} - 1)}{10}$$

erhält.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101213:

Es gilt

$$\begin{aligned} 2 \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + 2 \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + 8 \\ &= (a+b)^2 + (a-b)^2 + \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(ab)^2} + 8 \end{aligned}$$

Wegen $a + b = 1$ ist also

$$2 \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + 2 \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 = (a-b)^2 + \frac{(a-b)^2 + 1}{(ab)^2} + 9 \tag{2}$$

Der Term (2) erreicht für positive a, b mit $a + b = 1$ sein Minimum genau dann, wenn $a = b$ ist.

Beweis: Es gilt $(a - b)^2 \geq 0$ für alle positiven reellen Zahlen a und b , und das Gleichheitszeichen gilt genau



dann, wenn $a = b$ ist. In diesem Fall wird der erste Summand von (2) gleich 0, und beim zweiten Summanden erreicht der Zähler sein Minimum. Nun gilt

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

und das Gleichheitszeichen tritt wieder genau ein, wenn $a = b$ ist. In diesem Fall erhält man daher für den Nenner des zweiten Summanden ein Maximum. Deshalb erreicht auch der zweite Summand und somit die Summe für $a = b$, d.h. wegen $a + b = 1$ für $a = b = \frac{1}{2}$, ihr Minimum.

Folglich ist der kleinste Wert, den der Term (1) unter Berücksichtigung von $a + b = 1$ annimmt,

$$2\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 = 25$$

Daher gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101214:

- a) Auf Grund der Voraussetzung sind $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$ und $f(-1) = a + b + c$ ganzzahlig, also auch $f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2a$ und $f(1) - f(-1) = 2b$. Daher gilt $a = \frac{m}{2}$ und $b = \frac{n}{2}$ mit ganzen Zahlen m und n .

Ferner ist $f(1) - f(0) = a + b = \frac{m+n}{2}$ ganzzahlig, also sind m und n entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade. Nun gilt

$$f(x) = \frac{mx^2 + nx}{2} + c$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für alle geraden x ganzzahlig ist.

Sind nun x sowie m und n ungerade, so sind auch mx^2 und nx ungerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig. Ist x ungerade und sind m und n gerade, so sind auch mx^2 und nx gerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig.

Damit ist bewiesen, dass $f(x)$ für alle ganzen Zahlen x ganzzahlig ist.

- b) Unter der nun zugrundegelegten Voraussetzung kann nicht auf die angegebene Behauptung geschlossen werden; denn z.B. für $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0$ ist zwar $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(-1) = 0$ jedoch $f(1) = \frac{2}{3}$.
- c) Weitere Tripel ganzer Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben, bestehen z.B. aus

$$p = n - 1 \quad , \quad q = n \quad , \quad r = n + 1$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Sind nämlich

$$\begin{aligned} f(n-1) &= (n-1)^2 a + (n-1)b + c \\ f(n) &= n^2 a + nb + c \\ f(n+1) &= (n+1)^2 a + (n+1)b + c \end{aligned}$$

ganzzahlig, so sind auch die paarweise gebildeten Differenzen $(2n-1)a + b$ und $(2n+1)a + b$ sowie $4na + 2b$ ganzzahlig. Daraus folgt, dass auch $2a$, also auch $4na$ und mithin $2b$ ganzzahlig sind, woraus wiederum wie unter a) die Ganzzahligkeit von $a + b$ abgeleitet werden kann.

Da von den Zahlen $n-1$, n , $n+1$ mindestens eine gerade ist, folgt unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von $2a$ und $2b$, dass c ebenfalls ganzzahlig ist.

Wie unter a) lässt sich dann zeigen, dass $f(x)$ für alle ganzzahligen x ganzzahlig ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)



Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission